

Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:

<https://www.physics-and-stuff.com/>

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Dieses Werk von [Marvin Zanke](#) ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

a) I)
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) + \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot n(r) \right] \psi(r) = \mu \psi(r)$$

Thomas-Fermi-Näherung \Rightarrow
$$\left[V(r) + \frac{4\pi\hbar^2}{m} n(r) \right] \psi(r) = \mu \psi(r)$$

Wol $\psi(r) \neq 0$
 Grundzustand \Rightarrow
$$\frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4\pi\hbar^2}{m} |\psi(r)|^2 = \mu$$

\Rightarrow
$$\mu - \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} |\psi(r)|^2$$

(*) \Rightarrow
$$\frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} - \frac{m^2}{8\pi\hbar^2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = |\psi(r)|^2$$

\Rightarrow
$$|\psi(r)| = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{m\mu}{4\pi} - \frac{m^2}{2\pi} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)}$$

\Rightarrow
$$\psi(r) = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{\mu - \frac{m}{2} \omega^2 r^2}{4\pi}} e^{i\varphi}$$

Sollte stimmen. benutze also keine Abkürzungen, z.B. $g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}$

b)
$$\int d^3r |\psi(r)|^2 = N$$

Kugel köst. \Rightarrow
$$\int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho d\theta d\phi |\psi(r)|^2 = N$$
 (*)

Nun gilt aus (*) da $|\psi(r)|^2 \geq 0$, dass

$$\frac{m\mu}{4\pi\hbar^2} \geq \frac{m^2}{8\pi\hbar^2} \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

\Rightarrow
$$\frac{2\pi\mu}{m\omega^2} \geq r^2$$

\Rightarrow
$$\frac{2\mu}{m\omega^2} \geq r^2 \Leftrightarrow r \leq \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}} \Rightarrow r_{max} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}} \frac{1}{4\pi} \frac{m\mu - \frac{m^2}{2} \omega^2 r^2}{\hbar^2} dr \cdot 4\pi$$

lol kanns kaum lesen... erkenne also richtige Potenzen!

$$= \frac{\pi}{\hbar^2} \left[\frac{1}{3} \mu r^3 - \frac{m}{10} \omega^2 r^5 \right]_0^{\sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}} = \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{m\mu \cdot 2\mu \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}}{3m\omega^2} - \frac{m^2 \cdot 2^{\frac{5}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}}}{10\omega^2} \right]$$

$$= N \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{\mu^{\frac{5}{2}} \sqrt{8}}{3m^{\frac{3}{2}} \omega^2} - \frac{\omega^2 \mu^{\frac{5}{2}} \sqrt{32}}{10\omega^2 m \omega^2} \right] = \left[\frac{\sqrt{8} \mu^{\frac{5}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}} \omega^2} - \frac{\sqrt{32} \mu^{\frac{5}{2}}}{5m^{\frac{3}{2}} \omega^2} \right] \frac{1}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{15}{2} N \frac{m^{\frac{3}{2}} \omega^2}{\hbar^2} \right)^{\frac{2}{5}} = \frac{15}{2} N^{\frac{2}{5}} \frac{m^{\frac{3}{2}} \omega^2}{\hbar^2}$$

Nachmal in schön: $\mu = \left(\frac{15}{2} N \frac{m^2 \omega^2 r^2}{\sqrt{81}} \right)^{2/5}$ $\mu = \frac{5\omega}{2} \left(\frac{15}{2} \frac{m^2}{\hbar^2} \right)^{2/5}$ $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

3) $|\psi(r)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2}{a \pi}} e^{-\mu r^2}$, $|\psi(r)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mu - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2}{a \pi}$
 und nicht wechselwirkender harm. Oszillator

$$\Phi(r) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2} \quad , \quad |\Phi(r)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar} r^2}$$

Beim Bose-Einstein-Kondensat ist die Wahrscheinlichkeitsdichte fast linear fallend, während sie im harmonischen Oszillator exponentiell fallend ist mit r . Siehe ~~die~~ Mathematika Skizze auf der nächsten Seite.

4) Während der harmonische Oszillator keine Beschränkung für r hat, gibt es bei der Gross-Poisson-Gleichung ein maximales r ; für größere Werte wird die Lösung unphysikalisch.

Für die angegebenen Werte ergibt sich der folgende Graph, wobei der harmonische Oszillator eine noch schneller abfallende Wellenfunktion hat, er ist im Grunde also auch begrenzt. Die Formen sind sehr unterschiedlich, wobei wir leider auf verschiedenen Skalen arbeiten, da $\psi(x)$ nicht normiert ist für den harmonischen Oszillator.

```

N1 = 1 * 10^7;
m1 := 1.6 * 10^-27;
m := 23 * m1;
w := 600;
a1 := 0.5 * 10^(-10);
a := 50 * a1;
ħ := 6.6 * 10^(-34);

```

```

μ := (15 / 2 * N1 * m^(1 / 2) * w^3 * a * ħ^2 / 3)^(2 / 5);
rmax := Sqrt[2 * μ / (m * w^2)];

```

```

gp[r_] := 1 / (2 ħ) * Sqrt[(μ - m / 2 * w^2 * r^2) / (a * Pi)] * m;

```

```

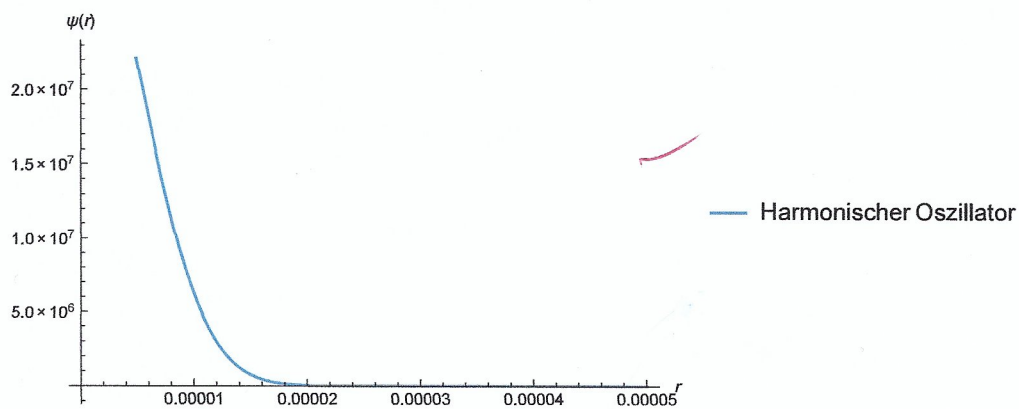
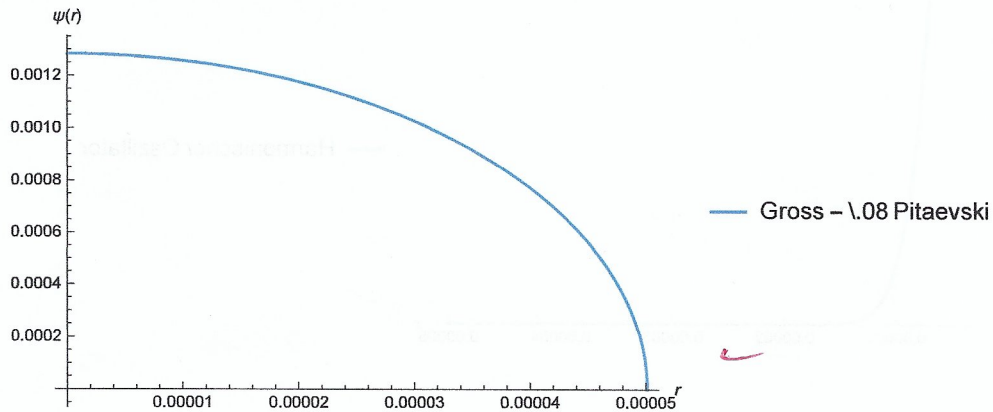
ho[r_] := (m * w / (Pi * ħ))^ (3 / 4) * Exp[-m * w * r^2 / (2 * ħ)];

```

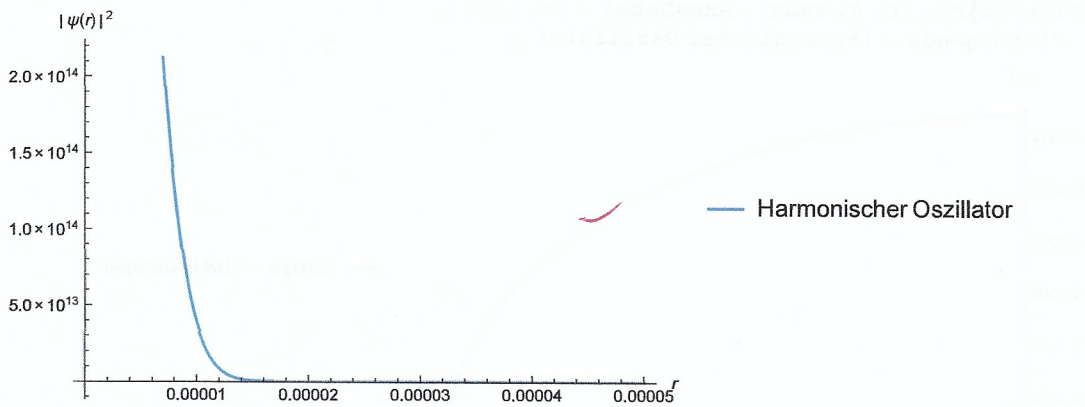
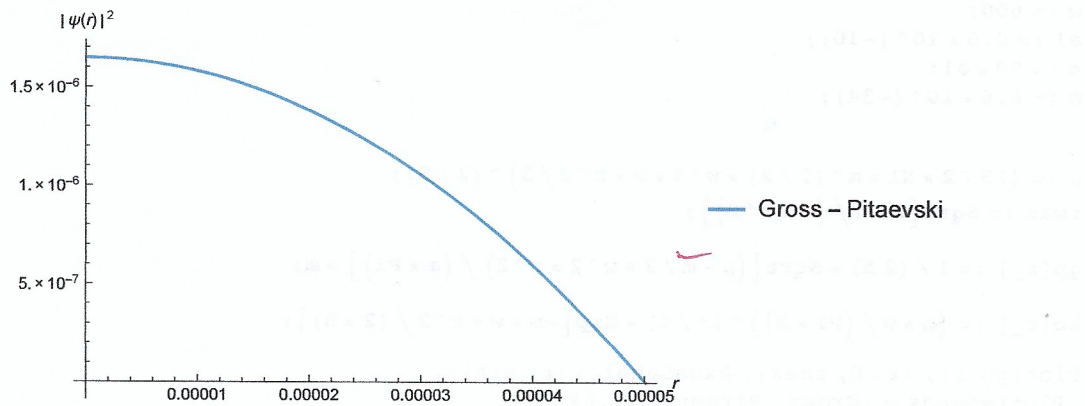
```

Plot[gp[r], {r, 0, rmax}, AxesLabel -> {r, ψ[r]},
PlotLegends -> {Gross - Pitaevski \.08}]
Plot[ho[r], {r, 0, rmax}, AxesLabel -> {r, ψ[r]},
PlotLegends -> {Harmonischer Oszillator}]

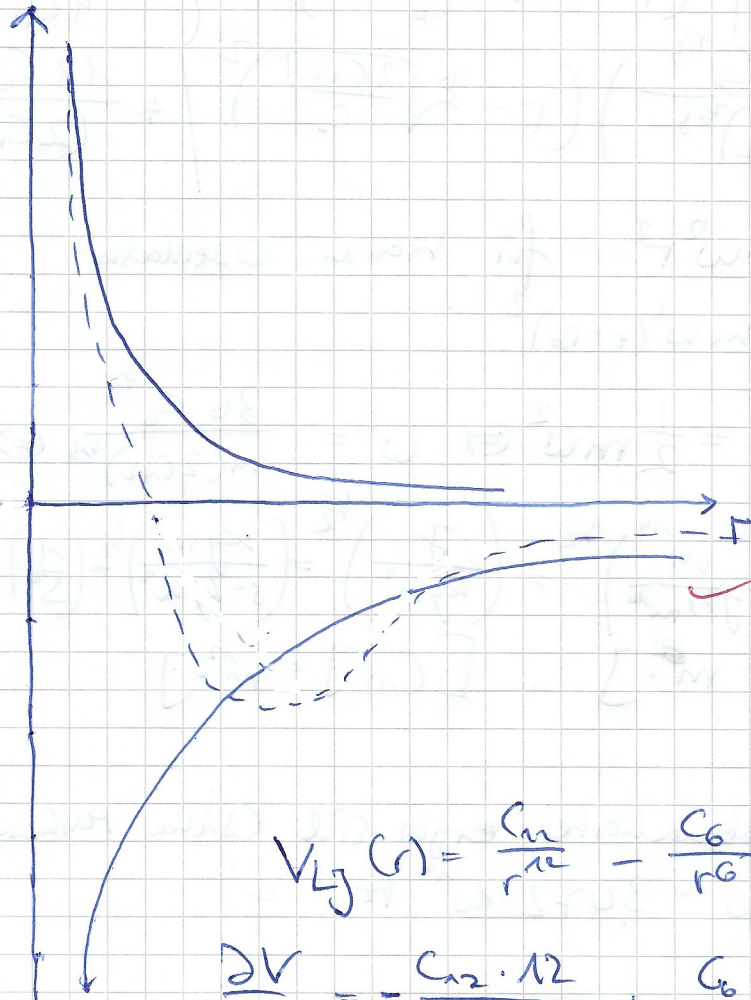
```



```
Plot[Abs[gp[r]]^2, {r, 0, rmax},  
  AxesLabel -> {r, Abs[ψ[r]]^2}, PlotLegends -> {Gross - Pitaevski}]  
Plot[Abs[ho[r]]^2, {r, 0, rmax}, AxesLabel -> {r, Abs[ψ[r]]^2},  
  PlotLegends -> {Harmonischer Oszillator}]
```



II)



$$V_{LJ}(r) = \frac{C_{12}}{r^{12}} - \frac{C_6}{r^6} \quad \text{für } r > 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{C_{12} \cdot 12}{r^{13}} + \frac{C_6 \cdot 6}{r^7}$$

$$0 = \frac{6C_6}{r^7} - \frac{12C_{12}}{r^{13}} \Leftrightarrow \frac{12C_{12}}{r^6} = \frac{6C_6}{1}$$

$$\Leftrightarrow 12C_{12} = 6C_6 \cdot r^6 \Leftrightarrow r^6 = \frac{2C_{12}}{C_6}$$

$$\Leftrightarrow r_0 = \sqrt[6]{\frac{2C_{12}}{C_6}} \quad \checkmark \quad \text{Minimum, da dort ein$$

Extremum und es ein Minimum
geben muss.

Taylor um $r=r_0$: $Tf(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

$$(r-r_0)V(r_0) + \frac{\partial V}{\partial r}(r_0)(r-r_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0)(r-r_0)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= (r-r_0)^0 V(r_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}(r_0)(r-r_0)^2 \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{da } \frac{\partial V}{\partial r}(r_0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{156C_{12}}{r^{14}} - \frac{42C_6}{r^8} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow TV(r \approx r_0) = \left(r - \sqrt[6]{\frac{2C_{12}}{C_6}} \right)^2 \left(\frac{C_{12}C_6^2}{4C_{12}^2} - \frac{C_6^2}{2C_{12}} \right) + \frac{\left(r - \sqrt[6]{\frac{2C_{12}}{C_6}} \right)^2}{2} \left(\frac{156C_{12}(C_6)^{14/3}}{r^{14}} - \frac{42C_6(C_6)^{8/3}}{r^8} \right)$$

$$= \left(\frac{-C_{12} C_6^2}{4 C_{12}^2} \left(r - b \sqrt{\frac{2 C_{12}}{C_6}} \right)^0 + \frac{72 C_{12} C_6^{7/3}}{2 (2 C_{12})^{4/3}} \left(r - b \sqrt{\frac{2 C_{12}}{C_6}} \right)^2 \right) + \frac{-C_6^2}{4 C_{12}^{7/3}} + \frac{18 C_6^{7/3}}{(2 C_{12})^{4/3}} \left(r - b \sqrt{\frac{2 C_{12}}{C_6}} \right)^2$$

$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ für harm. Oszillator

bzw: $\frac{1}{2} m \omega^2 (r-b)^2$

$$\Rightarrow \frac{18 C_6^{7/3}}{(2 C_{12})^{4/3}} = \frac{1}{2} m \omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{36 C_6^{7/3}}{m (2 C_{12})^{4/3}} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{36 C_6^{7/3}}{m (2 C_{12})^{4/3}}}$$

$$[\omega] \left(\frac{\text{J}^{7/3} \text{m}^{14}}{\text{kg} \cdot \text{J}^{4/3} \text{m}^{16}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{J}}{\text{kgm}^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \text{kgm}^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\text{s}^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\text{s}}$$

da $[C_6] = \text{m} \cdot \text{J}$, $[C_{12}] = \text{m}^2 \cdot \text{J}$

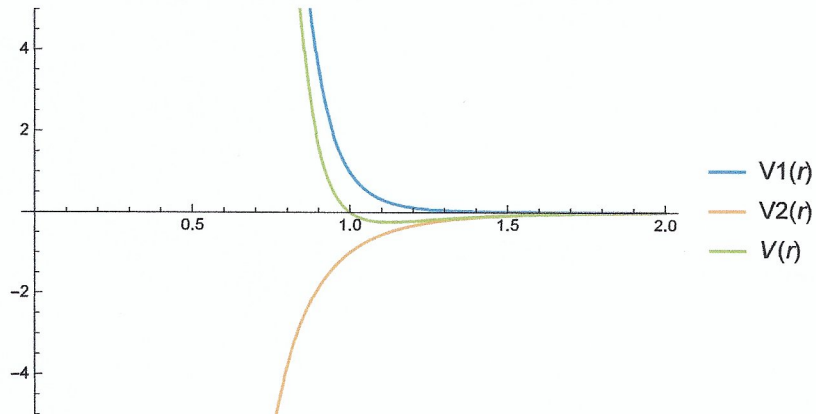
Für die angegebenen Werte ergibt sich (siehe Mathematika nächste Seite): $\omega = 3,472 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ ✓

```

V1[r_] := 1/r^12;
V2[r_] := -1/r^6;
V[r_] := V1[r] + V2[r];

Plot[{V1[r], V2[r], V[r]}, {r, 0, 2},
  PlotLegends -> "Expressions", PlotRange -> {-5, 5}]

```



```

C1 := 4.3 * 10^(-76);
C2 := 6.4 * 10^(-132);
m1 := 1.6 * 10^(-27);
m := 87 * m1;

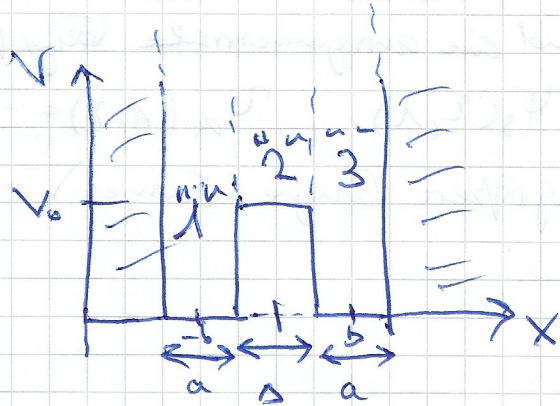
w := Sqrt[36 * C1^(7/3) / (m * (2 * C2)^(4/3))]

```

w

3.47193×10^{12}

III)



Für die Bereiche (1) und (3) ist das Potential $V=0$. Die Lösung
 sehen wir folgt aus:

$$\begin{aligned}
 & \psi = e^{\lambda x} \text{ Ansatz} \\
 & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi = E \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 = E \Rightarrow \lambda^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2} \\
 & \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \Rightarrow \psi_L = L_1 e^{i \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} x} + L_2 e^{-i \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} x} \\
 & \psi_R = R_1 e^{i \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} x} + R_2 e^{-i \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} x}
 \end{aligned}$$

Im Bereich (2) hingegen gilt mit dem Potential:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi = E \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 = E - V \\
 & \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} \\
 & \Rightarrow \psi_M = M_1 e^{\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} x} + M_2 e^{-\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar} x}
 \end{aligned}$$

Es gibt nun folgende Stetigkeitsbedingungen an die Funktion
 und deren Ableitung:

$$\begin{aligned}
 & \psi_L(-a) = \psi_M(-a), \quad \psi_R(a) = \psi_M(a) \\
 & \psi_L'(-a) = \psi_M'(-a), \quad \psi_R'(a) = \psi_M'(a)
 \end{aligned}$$

Lösung Mathematica:

Nun ist eine symmetrische und eine antisymmetrische Lösung für das Problem gesucht. $\Psi_s(1,2) = \Psi_s(2,1)$, $\Psi_a(1,2) = -\Psi_a(2,1)$
 Antisymmetrisch hat die größere Energie (Formel) ✓

[Faded handwritten notes and equations]

[Faded handwritten notes and equations]

[Faded handwritten notes and equations]

[Faded handwritten notes and equations]