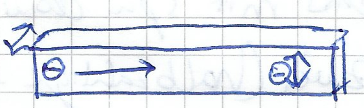
# Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

**Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.**

Physik IV Blatt 12 Martin Zänke

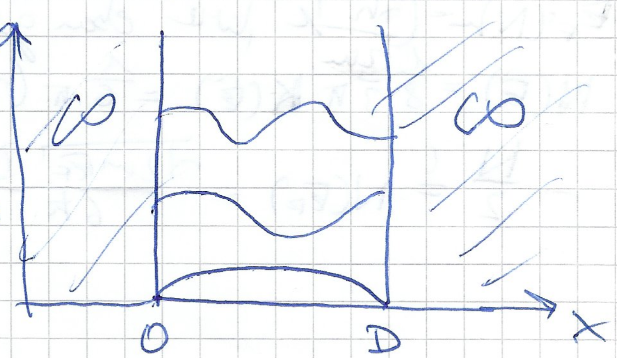
I)

1. 

Es sollte keine Bewegung der Elektronen in die beiden anderen Dimensionen mehr möglich sein. Da ein Elektron Ausmaße von etwa $10^{-19}$ m hat bewegen wir uns etwa in diesen Dimensionen. Viel Spaß beim konstruieren ☺!

Elektronen sind doch keine Murmeln!!

2. $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\,\psi(x)$$




Ansatz: $\psi(x)=e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\psi(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}=\lambda^2\psi(x)$$

$$\overset{SG}{\Rightarrow} -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2+V(x)=E$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2=E-V \Leftrightarrow \lambda^2=-\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$$

$$\overset{V=0 \text{ für } x\in[0,D]}{=} -\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \lambda=\pm i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \psi(x)=Ae^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}+Be^{-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}$$

Außerdem verschwindet die Wellenfkt an den Randpunkten wegen unendlich hohem Potential $\psi(0)=\psi(D)=0$

$$\Rightarrow A+B=0 \Rightarrow \psi(x)=A\left(e^{i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}-e^{-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x}\right)$$

$$=2iA\sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)$$

Dein k ist normalerweise n, dein λ ist k. Verwende in der Klausur lieber

$$\psi(D)=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}D=\cancel{k}\pi \Leftrightarrow \sqrt{2mE}=\frac{\cancel{k}\pi\hbar}{D}$$

$$\Leftrightarrow E=\frac{\cancel{k^2}\pi^2\hbar^2 n^2}{D^2 2m}$$ ✓

$$\int|\psi(x)|^2dx=1=-4A^2\int_0^D\sin^2\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)dx=-4A^2\left(\frac{D}{2}-\frac{\sin\left(2D\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)}{4\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sin\left(2D\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}-2D}=A^2=-\frac{1}{2D}\Leftrightarrow A=\pm i\frac{1}{\sqrt{2D}}$$ K ✓

$$\Rightarrow \psi(x)=\frac{\sqrt2}{\sqrt D}\sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)=\frac{\sqrt2}{\sqrt D}\sin\left(\frac{k\pi}{D}x\right)$$

3. Durch das Pauli-Prinzip ~~kann~~ können in jedes Energieniveau genau 2 Elektronen, eins mit Spin up, eins mit Spin down, da nach dem Pauli-Prinzip nie ~~mehr~~ zwei (halbzahlige Spinteilchen) Fermionen in ihrem Zustand exakt übereinstimmen dürfen. Der Spin spielt also eine wichtige Rolle, da er einen weiteren Freiheitsgrad darstellt.

Die Coulombwechselwirkung kann hier in guter Näherung vernachlässigt werden, da die Bindung im Festkörper der Abstoßung durch die Coulomb WW. überwiegt. Abschirmung ist das Stichwort

$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{D}\right)^2 k^2$ wie eben gezeigt.

$$N(E) = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi k(E) = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{2mE}\,\frac{D}{\pi\hbar}\right) = \frac{\sqrt{2mE}\,D}{6\hbar}$$

$$\frac{N}{2} \overset{!}{=} N(E_F) = \frac{\sqrt{2mE_F}\,D}{6\hbar} \iff \frac{3N\hbar}{D} = \sqrt{2mE_F}$$

$$\iff E_F \quad \frac{9N^2\hbar^2}{2mD^2}$$

4. $$\rho(E) = \frac{n(E)}{f(E)} = n(E)\left(e^{\frac{E-E_F}{k_BT}}+1\right), \quad \rho(E) = \frac{dN(\tilde{E})}{d\tilde{E}}\Big|_{\tilde{E}=E}$$

$$= \frac{1}{6}\pi\sqrt{2m}\,\frac{D}{\hbar}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$= \frac{1}{12}\pi\sqrt{2m}\,\frac{D}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$U = \int_0^{E_F} \frac{1}{12}\pi\sqrt{2m}\,\frac{D}{\hbar}\sqrt{E}\,dE$$

$$= \left[\frac{1}{12}\pi\sqrt{2m}\,\frac{D}{\hbar}\frac{2}{3}E^{3/2}\right]_0^{E_F} = \frac{1}{18}\pi\sqrt{2m}\,\frac{D}{\hbar}E_F^{3/2}$$

$\frac{dU}{dN} \overset{?}{=}$ Das hat irgendwie nicht geklappt...