Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Physik IV Blatt 2 Marvin Zanke, Übung 7, Florian

I. 1) $m_r = \frac{m_p m_e}{m_e + m_p} = \frac{m_e^2}{2m_e} = \frac{1}{2} m_e = 4{,}5547 \cdot 10^{-31} kg$

mit $m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31} kg$, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$

$m_e + m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$

$m_{r,H} = \frac{m_p m_e}{m_e + m_p} = \frac{m_p}{m_p} \cdot \frac{m_e}{\frac{m_e}{m_p}+1} \overset{m_p \gg m_e}{\approx} m_e$

2). Hier gilt für Bahn n:

$V_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar} = \alpha \frac{c}{n}$

$V_1 = 2187691{,}253 = 7{,}2974 \cdot 10^{-3} c$

$= \frac{1}{137} c \Rightarrow \alpha = 1/137$

Logisch, da gleiche Ladungen

Mit $r_n = n^2 \cdot a_0$ und $a_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc}$ folgt:

$E_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \alpha^2 m c^2$

Balmer Serie $n' > 2 \rightarrow n = 2$

$\Delta E = E_{n'} - E_n$ (*)

$E_{n,P} = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \alpha^2 \frac{1}{2} m_e c^2 = \frac{1}{2} E_{n,H}$

$\Rightarrow E_1 = -6{,}8 eV$, $E_2 = -1{,}7 eV$

$E_3 = -0{,}76 eV$, $E_4 = -0{,}425 eV$

$E_5 = -0{,}27$, $E_6 = -0{,}189 eV$

$E_7 = -0{,}139 eV$, $E_8 = -0{,}106 eV$

$E_9 = -0{,}084 eV$

Balmer-Serie aus (*): $\Delta E = h \cdot f = h \frac{c}{\lambda} = E_{n'} + 1{,}7 eV$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_{n'} + 1{,}7 eV} \Rightarrow \lambda_3 = 1{,}319 \cdot 10^{-6} m = 1319 nm$

$\lambda_4 = 9{,}724 \cdot 10^{-7} m = 972{,}4 nm$

$\lambda_5 = 8{,}67 \cdot 10^{-7} m = 867 nm$

$\lambda_6 = 8{,}205 \cdot 10^{-7} m = 820 nm$

$\lambda_7 = \cancel{6}7{,}943 \cdot 10^{-7} m = 794{,}3 nm$

$\lambda_8 = 777{,}8 nm$

$\lambda_9 = 767{,}2 nm$

1	2	3	4	Σ
4	5	/	4	13/20

hätte

Gemeinsam ist dem Wasserstoffatom und Positronium, dass die Differenzen bzw. Abstände zwischen den Energieniveaus immer kleiner werden und damit auch die Abstände der emittierten Wellenlängen. ✓ Außerdem beginnt das Emissionsspektrum von Wasserstoff etwa im Infraroten in der Balmer-Serie und endet kurz nach dem Ultravioletten. Beim Positronium sind wenn überhaupt bloß die Energiereichsten Übergänge der Balmer-Serie im Infrarot Iroten Bereich sichtbar, alle drunter liegen im nicht-sichtbaren 1000nm-Bereich. ✓ Beim Positronium scheint das Elektron schwächer an das Positron gebunden als das Elektron an das Proton.

3) $v_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$ und da $q_{Pro}=e$, $q_{Ele}=-e$ beim Wasserstoff und $q_{Pos}=e$, $q_{Ele}=-e$ beim Positronium, sind die Geschwindigkeiten gleich. ✓

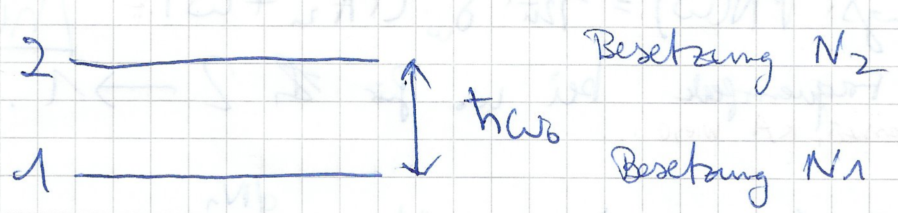
$$r_n = n^2 r_1 = n^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\hbar}{mc} = n^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{\frac{m_e c}{2}} = n^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} \cdot 2$$

$\Rightarrow$ Die Bahnradien sind doppelt so groß wie beim Wasserstoff. Das erklärt anschaulich auch, dass die Energien der gebundenen Zustände genau halb so groß (halb so stark gebunden) sind. ✓

4/4

II.

1)



$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 \cdot A_{21}$$, da kein äußeres Feld vorhanden ist und damit keine Absorption und keine stimulierte Emission stattfindet.

$$\frac{dN_2}{N_2} = -A_{21}\,dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{N_2}\,dN_2 = \int A_{21}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(N_2) = -A_{21}t + C$$

$$\Leftrightarrow N_2(t) = e^{-A_{21}t + C} = C' \cdot e^{-A_{21}t}$$

Nun gilt noch $N_2(0) = C'$ und damit

$$N_2(t) = N_2(0)\,e^{-A_{21}t}$$

Da der Energieabstand $\hbar\omega_0$ ist, ~~werden~~ wird Licht der Frequenz $\omega_0 = 2\pi f$ emittiert, also $\underline{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

$$\hbar\omega_0 = \frac{h}{2\pi}\omega_0 = hf$$

2) $$\mathcal{F}N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, f(t)\, e^{-it\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, N_2(0)\, e^{-A_{21}t - it\omega}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_2(0) \int dt\, e^{-t(A_{21}+i\omega)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_2(0) \frac{1}{A_{21}+i\omega} \left[e^{-t(A_{21}+i\omega)}\right]^{\infty}$$

Nevermind

Da $$f(t) = \begin{cases} N_2(0)\,e^{-A_{21}t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ um physikalisch Sinn zu machen

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_1(0) \frac{1}{A_{21}+i\omega} \left[e^{-t(A_{21}+i\omega)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N_2(0)}{A_{21}+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_2(0) \frac{\Gamma}{\Gamma^2+\omega^2}$$

Halbwertsbreite Γ

Nach Mathematica ergibt die Fourier-Transformierte von der Funktion allerdings: $PN(\omega) = \sqrt{2\pi}\,\delta_\omega(iA_{21}+\omega)$ *

Also nur ein Frequenzpeak bei ω_0 für ~~A_{21}~~ $2 \to 1$.

[Plot ist hinten!]

* ist mir auch passiert, kA wieso ...

3. $$\frac{dN_2}{dt} = B_{21} I (N_1 - N_2) - A_{21} N_2 = -\frac{dN_1}{dt}$$ inhomogene Dgl.

$$\frac{dN_2}{dt} = B_{21} I N_1 - B_{21} I N_2 - A_{21} N_2 = \cancel{B_{21} I N_1 - N_2(B_{21} I + A_{21})}$$

"Quelle" Wikipedia: (*) Idee

$$\frac{dN_1}{dt} - \frac{dN_2}{dt} = -B_{21} I N_1 + B_{21} I N_2 + A_{21} N_2$$
$$- B_{21} I N_1 + B_{21} I N_2 + A_{21} N_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(N_1 - N_2)}{dt} = -2B_{21} I N_1 + 2B_{21} I N_2 + 2A_{21} N_2$$

$\Delta N = N_1 - N_2$, $\quad N = N_1 + N_2$

$$\Rightarrow \frac{d\Delta N}{dt} = -2B_{21} I (N_1 - N_2) + A_{21}(N_1+N_2) - A_{21}(N_1 - N_2)$$

Nun gilt im stationären Zustand: $\frac{d\Delta N}{dt} = 0$

$$\Rightarrow 0 = -2B_{21} I \Delta N' + A_{21} N - A_{21} \Delta N'$$
$$= \Delta N(-2B_{21} I - A_{21}) + A_{21} N$$
$$\Leftrightarrow A_{21} N = \Delta N'(2B_{21} I + A_{21})$$
$$\Leftrightarrow \Delta N' = \frac{A_{21} N}{2B_{21} I + A_{21}} = \frac{A_{21}}{A_{21}} \frac{N}{2I\frac{B_{21}}{A_{21}} + 1}$$
$$= \frac{N}{2\,I/I_s + 1} > 0 \text{ mit } I_s = \frac{A_{21}}{B_{21}}$$ ✓

Was passiert für $I \gg 1$, 1? $\gg I_s$

Diese Zahl ist immer größer 0, d.h. es ist keine Inversion möglich. Ein Zwei-Niveau-Laser ist also nicht optimal. Das liegt daran, dass $B_{12} = B_{21}$ und im Gleichgewichtsfall damit genau so wahrscheinlich emittiert (stimuliert) wie absorbiert wird (wegen $N_1 \approx N_2$). Zusätzlich wird noch spontan emittiert. Ist bei hohen I vernachlässigbar

(*) de.wikipedia.org/wiki/Laser#Zweiniveausystem

5/6

IV. 1)

$\ominus e$

$\oplus$ Ze | $\mu = m_e$, da Kerne noch schwerer als bei Positron

$(*1)$ $mvr = n\hbar$ Quantisierung Bohr

$(*2)$ $\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e \cdot Z \cdot e}{r^2}$ Zentrifugal = Coulomb

$(*3)$ $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e \cdot Z \cdot e}{r}$ Energie $T + V$

Mit $(*1)$ und $(*2)$ gilt: $v_n = \frac{n\hbar}{m r_n} = \frac{n\hbar}{m} \frac{m v_n^2 \, 4\pi\varepsilon_0}{eZe}$

$\Leftrightarrow \underline{v_n} = \frac{eZe}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar} = \frac{1}{n} \frac{eZe}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}$

$\Rightarrow \underline{r_n} = \frac{n\hbar}{m v_n} = \frac{n\hbar}{m} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar n}{eZe} = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m eZe}$

Nun folgt aus $(*2)$ und $2E_{kin} = mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{eZe}{r} = E_{pot}$

$\Rightarrow E_{kin} = -\frac{E_{pot}}{2} \overset{(*3)}{\Rightarrow} \underline{E_n} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{eZe}{r_n}$

$= -\frac{1}{2} \frac{eZe}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{m eZe}{n^2 \hbar^2 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{1}{2} \frac{m e^4 Z^2}{\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2} \cdot \frac{1}{n^2}$

Mit $v_n = \frac{1}{n} \frac{eZe}{4\pi\varepsilon_0 \hbar}$ folgt, dass

$\frac{v_n}{c} \geq 0{,}1$ für: $\frac{1}{n} \frac{eZe}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \geq 0{,}1$

$\Leftrightarrow Z \geq 0{,}1 \frac{n 4\pi\varepsilon_0 \hbar c}{e^2} \Big|_{n=1} = \underline{\underline{13{,}7 \approx 13}}$

für $n = 2, \ldots$ Geschwindigkeit kleiner OK

2)

$n \gg 1$

Thermische Energie bei Raumtemperatur:

Mit $T = 293{,}15\,K$ und $E_{th} = \frac{f}{2} k_B T$

folgt für $f = 3$ Freiheitsgrade:

$E = \frac{3}{2} k_B T = 6{,}071 \cdot 10^{-21}\,J = 0{,}038\,eV$

$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{m e^4 Z^2}{\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2} \doteq 6{,}071 \cdot 10^{-21}\,J \Leftrightarrow n^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m e^4 Z^2}{\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2 \, 0{,}038\,eV}$

$= 358{,}04$

$\Rightarrow n = 18{,}92 \Rightarrow n = 18$ da ...

Energie größer gleich der thermischen Energie. Bei n = 13 wäre sie etwas zu klein.

Da die Bindungsenergie auf Schale 13 durch die thermische Energie aufgebracht werden kann, würde das Elektron sich wahrscheinlich vollständig vom Kern lösen und ionisiert werden. ✓

4 / 4

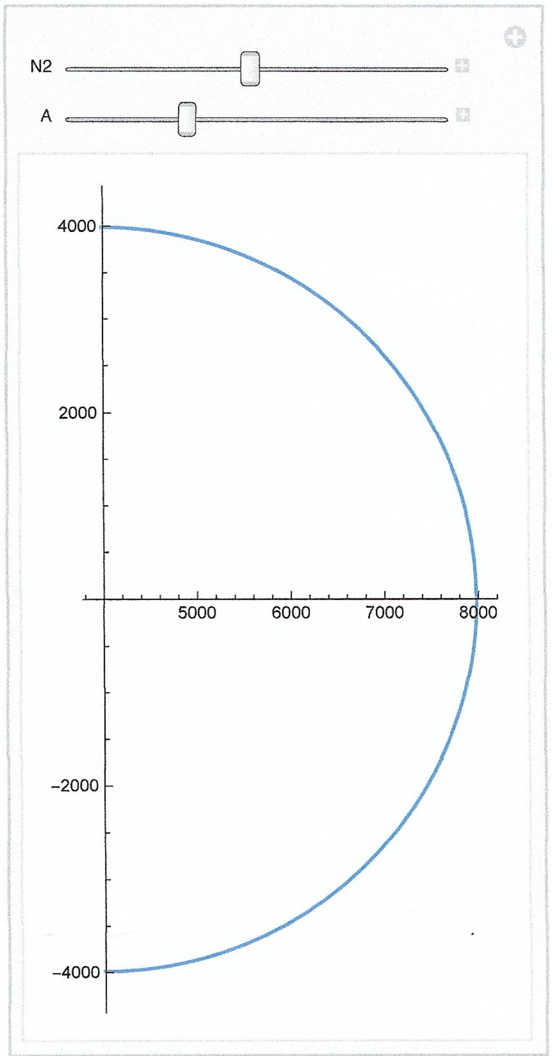
In[595]:=

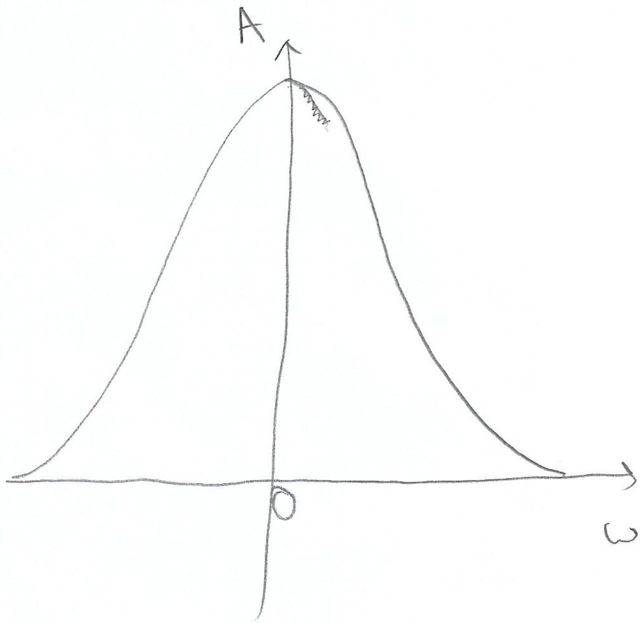
```
F[w_, N2_, A_] := 1/(Sqrt[2*Pi]) * N2/(A + ⅈ*w)
```

In[611]:=

```
Manipulate[ParametricPlot[{Re[#], Im[#]} &@F[w], {w, -50, 50}],
 {N2, 0, 800000}, {A, 0, 5000}]
```

Out[611]=





Was auffällt ist, dass der Graph sich nicht merklich ändert für andere Werte von N_2 und A ...

Der ~~B~~ Plot 'sollte' eine Lorentzkurve sein