Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Marvin Zanke Physik IV Blatt 4

1	2	3	4	Σ
4	4	3.5	2	13.5/20

Hütteler

1) – Der Grundzustand n = 1 sieht in x-, y-, z-Achse gleich aus,

1. Also symmetrische Wahrscheinlichkeiten. Der Imaginärteil ist 0.

Skizzen im Anhang!

– Bei ψ_{21-1} wechselt die Parität an der x-Achse bei der 0. An der y-Achse genau umgekehrte Parität. ~~In~~ Richtung z-Achse keine Welle

– 2,1,0 nur Welle in z-Richtung, nur Reell.

– 2,1,1 Wieder Reell in x, Imaginär in y-Richtung. Keine Welle in z-Richtung. Gleiche Parität.

⋮

Allgemein sieht die Graphen einfach Schnitte in den Orbitalen, die wir in der VL gesehen haben. Also Schnitte durch die 3-dim. Flkt.

2. $n=1,\ l=0$:

$$\Psi_{100}(\rho,\theta,\varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{a_n}\right)^3 \frac{0!}{2}} \cdot e^{-\rho}\, L_2^1(2\rho)\, Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$\Psi_{2,1,1}(\rho,\theta,\varphi)$$

Zeitentwicklung : $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

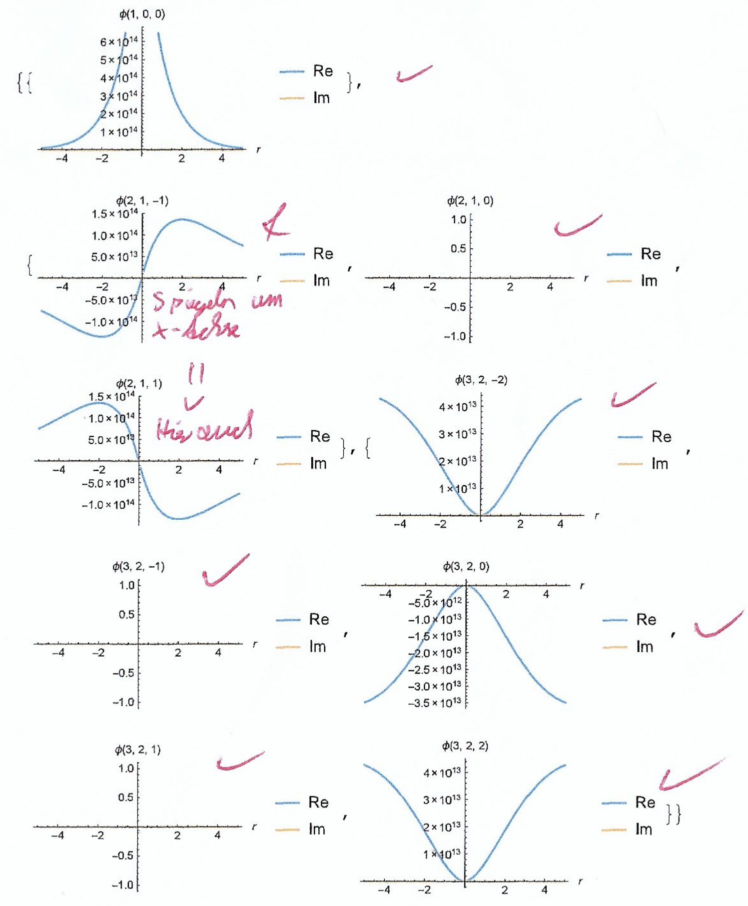
Überlagerung: $\Psi_{100}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \Psi_{2,1,1}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$ ✓

wobei $E = E_1 + E_2$

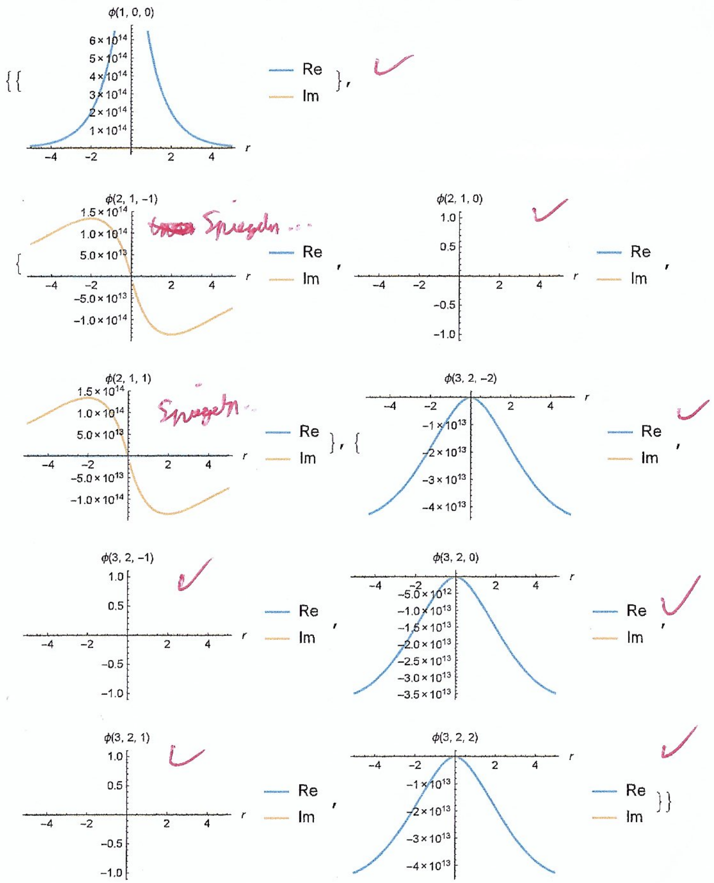
```
Unprotect[Power];
Power[0, 0] = 1;
Protect[Power];

a := 5.29*^-11;

phi[n_, l_, m_, r_, t_, p_] :=
  Sqrt[(2 / (n * a)) ^3 * (Factorial[n - l - 1]) / (2 * n * Factorial[n + l])] *
   Exp[-Abs[r / n]] * (2 * Abs[r / n]) ^l *
   LaguerreL[n - l - 1, 2 * l + 1, 2 * Abs[r / n]] * SphericalHarmonicY[l, m, t, p]
```



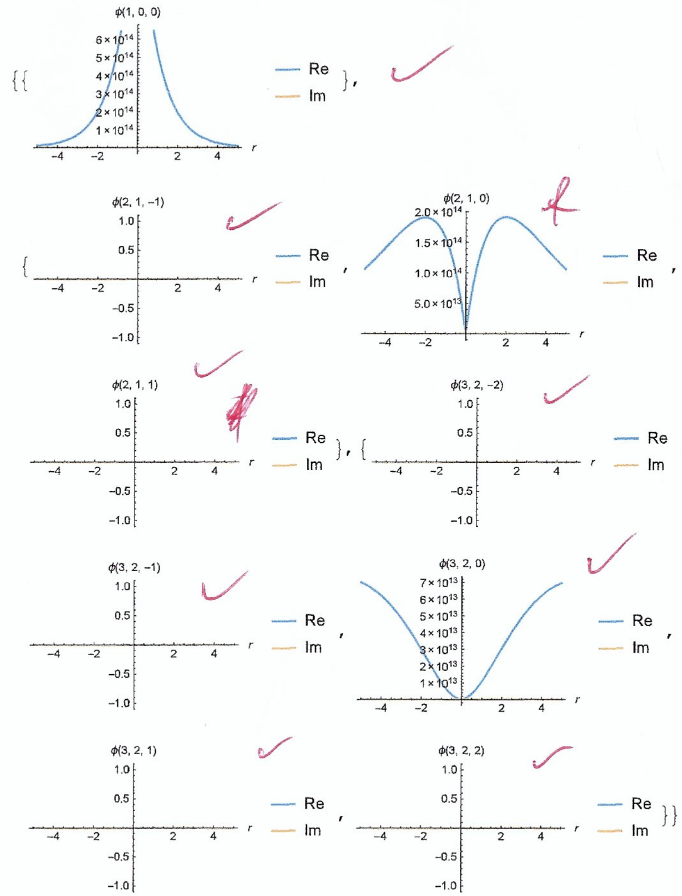
```
Table[Plot[{Re[phi[n, n - 1, m, x, Pi/2, Pi/2 (1 - Sign[x])]],
   Im[phi[n, n - 1, m, x, Pi/2, Pi/2 * (1 - Sign[x])]]},
  {x, -5, 5}, AxesLabel → {r, ϕ[n, n - 1, m]},
  PlotLegends → {"Re", "Im"}], {n, 1, 3}, {m, 1 - n, n - 1}]
```



```
Table[Plot[{Re[phi[n, n - 1, m, x, Pi/2, Pi/2 * (2 - Sign[x])]],
    Im[phi[n, n - 1, m, x, Pi/2, Pi/2 * (2 - Sign[x])]]},
  {x, -5, 5}, AxesLabel → {r, ϕ[n, n - 1, m]},
  PlotLegends → {"Re", "Im"}], {n, 1, 3}, {m, 1 - n, n - 1}]
```




```
Table[Plot[{Re[phi[n, n - 1, m, x, 0, 0]], Im[phi[n, n - 1, m, x, 0, 0]]},
  {x, -5, 5}, AxesLabel → {r, ϕ[n, n - 1, m]},
  PlotLegends → {"Re", "Im"}], {n, 1, 3}, {m, 1 - n, n - 1}]
```



Ich kann hier nicht ablesen, welches x x, y oder z entspricht.
Weil mich das geärgert hat: ~~??~~ $\frac{88}{27}$ Punkte (≈3.5..)

Marvin Zanke

II)

1) Kernmasse m_A Reduzierte Masse $\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$

Kernladungszahl Z $\mu_1 = \frac{m_A m_e}{m_A + m_e}$, $\mu_2 = \frac{m_B m_e}{m_B + m_e}$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 m_e c^2}{n^2}$$

$$\Delta E_A = E_{x,A} - E_{y,A} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \mu_1 c^2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \mu_1 c^2}{y^2} = h\nu_A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha^2 \mu_1 c^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) = h\nu_A$$

$$\Delta E_B = E_{x,B} - E_{y,B} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \mu_2 c^2}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 \mu_2 c^2}{y^2} = h\nu_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha^2 \mu_2 c^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) = h\nu_B$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_A - \nu_B}{\nu_A} = \cancel{\frac{1}{2h}\alpha^2\mu_1 c^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)}\ 1 - \frac{\nu_B}{\nu_A}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2h}\alpha^2 \mu_2 c^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{2h}\alpha^2 \mu_1 c^2\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = 1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$= 1 - \frac{m_B m_e}{m_A m_e} \cdot \frac{m_A + m_e}{m_B + m_e} = 1 - \frac{m_B}{m_A}\frac{m_A + m_e}{m_B + m_e} = \delta_{AB}$$

Gesucht ist, wo $\frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A + m_e}{m_B + m_e}$ am kleinsten ist.

$$\cancel{= \frac{Z m_p}{(Z-1) m_p} \cdot \frac{(Z-1) m_p + m_e}{Z m_p + m_e}} = \cancel{\frac{Z(Z-1) m_p^2 + Z m_p m_e}{Z(Z-1) m_p^2 + (Z-1) m_p m_e}}$$

$$\cancel{= \frac{(Z-1) m_p^2 + m_p m_e}{(Z-1) m_p^2 + \frac{(Z-1)}{Z} m_p m_e}}$$

$$\frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A + m_e}{m_B + m_e} = \frac{(Z-1) m_p}{Z m_p} \cdot \frac{Z m_p + m_e}{(Z-1) m_p + m_e}$$

$$= \frac{Z(Z-1) m_p^2 + (Z-1) m_p m_e}{Z(Z-1) m_p^2 + Z m_p m_e} = \frac{(Z-1) m_p^2 + \frac{(Z-1)}{Z} m_p m_e}{(Z-1) m_p^2 + m_p m_e}$$

Am kleinsten für kleine Z, also Wasserstoff (Zähler am kleinsten!)

2) Es gilt $|E(r)| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_p^3} r$ für innen.

$$|E(r)| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für außen}$$

Das Potential ist: $\varphi_a(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ außen

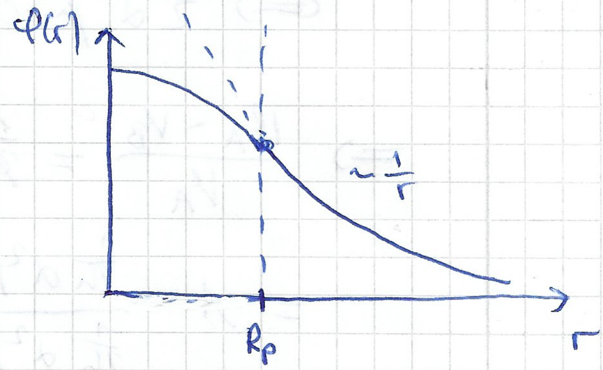
Für innen gilt:
$$\varphi_i(r) = -\int E(r)\,dr = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R_p^3} r^2 + C$$

und $\varphi_i(R_p) = \varphi_a(R_p) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_p} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R_p} + C$

$$\Leftrightarrow C = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R_p} \Rightarrow \varphi_i(r) = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R_p^3} r^2 + \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R_p}$$

$$\varphi_i(r) = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 R_p}\left(-\frac{r^2}{R_p^2} + 3\right) = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R_p}\left(1 - \frac{r^2}{3R_p^2}\right)$$

$$\rightarrow \varphi(r) = \begin{cases} \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R_p}\left(1 - \frac{r^2}{3R_p^2}\right) & 0 \le r \le R_p, \\ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R_p \end{cases}$$ ✓



$$F_{pot} = \begin{cases} \frac{-3e^2}{8\pi\epsilon_0 R_p}\left(1 - \frac{r^2}{3R_p^2}\right), & 0 \le r \le R_p \\ \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R_p \end{cases}$$

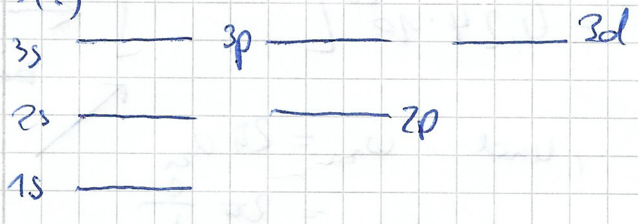
Außerhalb der Ausdehnung des Protons bleiben die Energie-Zustände gleich.
Innerhalb wird die Bindung schwächer, die Elektronen haben (Vorzeichen!) eine größere potentielle Energie. ✓

Man kann das Spektrum von einem Atom zerlegen. Berechnet man nun den Effekt dann mit ein, so erhält man ein anderes Spektrum als man ohne diesen Effekt erwartet hätte. Dadurch erhält man Auskunft über die Ladungsverteilung. ✓

4/4

II)

1.)



Hier muss gelten: $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta n \geq -1$

$2s \rightarrow /$ da bei 1s $\Delta l = 0$

$3s \longrightarrow 2p$

$3p \longrightarrow 2s, 1s$

Die längste Lebensdauer hat demnach der 2s Zustand, da er die wenigsten Möglichkeiten hat ~~zu~~ zerfallen (nur verbotene Übergänge?~)

Am unstabilsten ist 3p.

2.) $(\psi_{1s}, e\hat{z}\psi_{2p}) = \int \psi_{100}\, e\hat{z}\, \psi_{210}\, d^3r = e\int z\, \psi^*_{100}\psi_{210}\, d^3r \; (*)$

$Y_{00}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$

$\psi_{100} = \frac{2}{a_0^{3/2}} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$\psi_{210} = \sqrt{\frac{1}{24 a_0^3}}\, \frac{r}{a_0}\, e^{-r/2a_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$

$$\Rightarrow (*) = e \iiint dr\, d\vartheta\, d\varphi\, r\cos\vartheta\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{24 a_0^3}}\, \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta\, \overbrace{r^2 \sin\vartheta}^{\text{det.}}$$

$$= 2\pi e \iint dr\, d\vartheta\, \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, r^4 \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{a_0^4} \cdot e^{-r/a_0} \cdot e^{-r/2a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\pi e}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} a_0^4} \iint r^4 \sin\vartheta \cos^2\vartheta\, e^{-\frac{3r}{2a_0}}\, d\vartheta\, dr$$

Mathematica →

$$= \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} a_0^4} \int r^4 e^{-\frac{3r}{2a_0}}\, dr \cdot \frac{2}{3} = \frac{e}{3\sqrt{2} a_0^4} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{3r}{2a_0}}\, dr$$

Mathematica $\left[-\frac{2}{81} a_0 e^{-\frac{3r}{2a_0}} \left(128 a_0^4 + 192 a_0^3 r + 144 a_0^2 r^2 + 72 a_0 r^3 + 27 r^4\right)\right] = -\frac{2}{81} a_0 (128 a_0^4)$

$$= \frac{e}{\sqrt{2}\, 3 a_0^4} \left(-\frac{2}{81} a_0^5 \cdot 128\right)$$

$$= e \frac{128\, a_0 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 243} = \frac{128\sqrt{2}}{243} a_0 \cdot e$$

$$= \langle d_{21} \rangle$$

Aus der Vorlesung wissen wir: $B_{21} = \frac{\langle d_{21}\rangle^2 \pi}{3\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{\pi}{3\epsilon_0\hbar^2} \cdot e^2 a_0^2 \cdot \frac{128^2 \cdot 2}{243^2}$

$= 4{,}24 \cdot 10^{20} [\quad] \leftarrow ??$ Einheit

$\frac{m^3}{J s}$?

Außerdem gilt: $A_{21} = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} B_{21}$, und $\omega_{21} = 2\pi \nu_{21} = 2\pi \frac{c}{\lambda_{21}}$

$= \frac{\hbar (2\pi)^3 \cdot \frac{c^3}{\lambda_{21}^3}}{\pi^2 c^3} B_{21}$

$= \frac{8\hbar \pi^3}{\pi^2 \lambda_{21}^3} \cdot B_{21} = \frac{8\hbar \pi B_{21}}{\lambda_{21}^3}$ (*) $\cancel{1{,}124 \cdot 10^{12}} [\quad]$

In Wasserstoff gilt: $\Delta E = 13{,}6\,eV \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = 1{,}634 \cdot 10^{-18} J$

(*) $= \frac{8\hbar \pi B_{21}}{c^3} \nu_{21}^3 = \frac{8\hbar\pi B_{21}}{c^3} \frac{(\Delta E)^3}{h^3} = \frac{8\hbar\pi B_{21}}{c^3} \frac{\Delta E^3}{\hbar^3 (2\pi)^3}$

$= \frac{B_{21} \cdot \Delta E^3}{c^3 \cdot \hbar^2 \pi^2} = 625472211 [\quad] \leftarrow$? Einheit?

$\tau = \frac{1}{A_{21}} = 1{,}5988 \cdot 10^{-9} s$ ✓

Für den klassischen Dipol gilt:

$\tau = \frac{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e}{e^2 \omega^2}$, $\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$

$= 6{,}647 \cdot 10^{-10} s$

Das QM-Modell ist also fast exakt für die betrachtete Lebensdauer!

3. Es müssen nur p-Zustände berücksichtigt werden, da $\Delta l = \pm 1$ gelten muss. Aus s ist also nur p möglich und vice versa ✓

4. ✓

3.5 / 7

IV)

$$\phi(k) = \frac{1}{2\pi^{3/2} a_B^{3/2}} \frac{1}{(|k|^2(2\pi)^2 + \frac{1}{4\pi^2 a_B^2})^2}$$

$$\psi_{100} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$\langle \hat{p}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^* p_x \phi \, dp_x = \frac{1}{4\pi^7 a_B^5} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{p_x}_{\text{ungerade Fkt}} \underbrace{\frac{1}{(\frac{p^2}{(2\pi\hbar)^2} + \frac{1}{4\pi^2 a_B^2})^4}}_{\text{gerade Fkt}} dp_x$$

$$= 0 \checkmark$$

$$\langle \Delta p_x \rangle^2 = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \langle p_x^2 \rangle$$

Mathematica

$$= \frac{1}{4\pi^7 a_B^5} \int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 \frac{1}{(\frac{p^2}{(2\pi\hbar)^2} + \frac{1}{4\pi^2 a_B^2})^4} dp_x = 4\pi^2 \hbar^2 \text{ ✗}$$

$$= \frac{8\pi^3}{a_0^2}$$

$$\langle \hat{X}_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi \, dx_x = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\text{ungerade}} \underbrace{\psi^* \psi}_{|\psi|^2 \text{: gerade}} dx_x = 0 \checkmark$$

$$\langle \Delta x_x \rangle^2 = \langle x_x^2 \rangle - \langle x_x \rangle^2 = \langle x_x^2 \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_x^2 \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ ✗} \qquad 3a_0^2$$

$$\Rightarrow (\Delta x_x)^2 (\Delta p_x)^2 = 2\pi\hbar^2 \Leftrightarrow \Delta p_x \Delta x_x = \sqrt{2\pi}\,\hbar > \frac{\hbar}{2} \ (\checkmark)$$

Heisenberg erfüllt.

Das Kern kann nicht in den Kern stürzen. Wäre Δx noch kleiner, das Elektron also im Kern exakt lokalisiert, so wäre die Unschärfe im Impuls sehr hoch.✓ Das Elektron würde anschaulich also eine Zitterbewegung durchführen ✓

Genauer: e^- im Kern bedeutet, dass Δx u. Δp ~~...~~ 0 wären.

2/3