Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Physik IV Blatt 5 Marvin Zanke

1	2	3	4	Σ
4,5	5	3,5	7	20/20

Kritzeln

I 1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\sigma_3$$

$$= -[\sigma_2, \sigma_1]$$

$$[\sigma_1, \sigma_3] = \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2i\sigma_2$$

$$= -[\sigma_3, \sigma_1]$$

$$[\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_1$$

$$= -[\sigma_3, \sigma_2]$$

$$\Longrightarrow \quad [\sigma_k, \sigma_l] = 2i\,\epsilon_{klm}\,\sigma_m$$

2) $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ <u>Bd.:</u> $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} a + d &= x = x^* \\ b - ci &= y = z^* \\ b + ci &= z = y^* \\ a - d &= w = w^* \end{aligned}$$

Nun gilt auch $\bar{M}^t = M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* & z^* \\ y^* & w^* \end{pmatrix}$ und damit $x = x^*$, $y = z^*$, $z = y^*$, $w = w^*$

Daraus folgt, dass $(a+d) + (a-d) = \boxed{2a \in \mathbb{R}}$, da x und w offensichtlich reell wenn $x = x^*$ und $w = w^*$. Damit auch $\boxed{d \in \mathbb{R}}$

Also $2a = x + w \Longleftrightarrow \boxed{a = \frac{x+w}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{x+w}{2} + d = x \Longleftrightarrow \boxed{\frac{x-w}{2} = d}$$

Außerdem $(b - ci) + (b + ci) = 2b = y + z = \boxed{y + y^* \in \mathbb{R}}$

$$\Longrightarrow \boxed{b = \frac{y+z}{2}} \Rightarrow \frac{y+z}{2} - ci = y$$

$$\Longleftrightarrow ci = \frac{z-y}{2} \Longleftrightarrow \boxed{c = i\,\frac{y-z}{2}} \boxed{\in \mathbb{R}}, \text{ weil } y - y^* \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

3) $\psi = \alpha \psi_\uparrow + \beta \psi_\downarrow$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\psi_\uparrow = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\psi_\downarrow = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Es gilt $\sigma_z \psi_\uparrow = \psi_\uparrow$ und $\sigma_z \psi_\downarrow = -\psi_\downarrow$,

da $\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

?

$$\langle \sigma_x \rangle = \psi^* \sigma_x \psi = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = \alpha^*\beta + \beta^*\alpha$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta i\\ \alpha i\end{pmatrix} = i(\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^*\\ \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix} = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*$$

Warum lässt man hier die Integrale weg? Bzw. wie löst man die Aufgabe ohne Vektornot.

Dass ein Erwartungswert ungleich 0 ist bedeutet 3 Spezialfälle.

$\langle \sigma_x \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha\beta^* - \beta\alpha^* = 0 \wedge \underbrace{\alpha\alpha^* - \beta\beta^* = 0}_{|\alpha|^2 = |\beta|^2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta\beta^*}{\alpha^*} \wedge \frac{\beta\beta^*}{\alpha^*}\beta^* = \beta\alpha^* \Leftrightarrow \beta\beta^{*2} = \beta\alpha^{*2}$

$\Leftrightarrow \beta^{*2} = \alpha^{*2} \Leftrightarrow \beta^* = \alpha^*$

$\boxed{\alpha = \beta}$ ✓

$\langle \sigma_y \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^*\beta + \beta^*\alpha = 0 \wedge \alpha\alpha^* - \beta\beta^* = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta\beta^*}{\alpha^*} \wedge -\alpha^*\beta = \beta^* \frac{\beta\beta^*}{\alpha^*}$

$\Leftrightarrow -\alpha^{*2}\beta = \beta\beta^{*2} \Leftrightarrow \beta^{*2} = -\alpha^{*2} \Leftrightarrow -\beta^* = \alpha^*$

und $\alpha = -\beta$ ✓

$\langle \sigma_z \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \alpha\beta^* - \beta\alpha^* = 0 \wedge \alpha^*\beta + \beta^*\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta\alpha^*}{\beta^*} \wedge -\alpha^*\beta = \beta^* \frac{\beta\alpha^*}{\beta^*}$

$\Leftrightarrow -\alpha^*\beta^* = \beta^*\alpha^* \Leftrightarrow -\alpha^* = \alpha^* \Leftrightarrow \alpha = 0 \wedge \beta = 0$

Es gibt keinen Zustand sodass der Spin-Operator ~~Kinderkram~~ $\langle \sigma_z \rangle \neq 0$ hat mit $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$

$\alpha^*\beta = 0$ erfüllt $\langle \sigma_z \rangle \neq 0$ mit $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$

4.5/5

II

1) $W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|E(r)|^2$

Im Innern gilt (letztes Blatt): $|E_{innen}| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_e^3}$

$|E_{außen}| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Damit gilt:

$$W_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_{Innen} d^3r\,|E_{innen}(r)|^2 + \int_{außen} d^3r\,|E_{außen}|^2\right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta\left[\int_0^{R_e} r^2|E_{innen}|^2\,dr + \int_{R_e}^{\infty} r^2|E_{außen}|^2\,dr\right]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\,4\pi\left[\int_0^{R_e} dr\left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_e^3}\,r\right)^2 r^2 + \int_{R_e}^{\infty} dr\left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\right]$$

$$= \epsilon_0\,2\pi\,\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0^2}\left[\int_0^{R_e}\frac{1}{R_e^6}\,r^4\,dr + \int_{R_e}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr\right]$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_e^6}\,\frac{1}{5}R_e^5 + \frac{1}{R_e}\right]$$

$$= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1}{5R_e} + \frac{1}{R_e}}_{\frac{6}{5R_e}}\right]$$

$$= \frac{3}{20}\,\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 R_e}$$

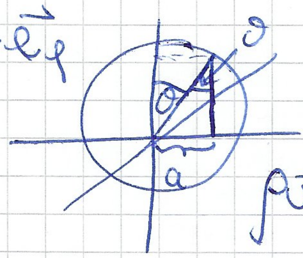
$m_e c^2 = \frac{3}{20}\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 R_e} \Leftrightarrow R_e = \frac{3}{20}\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m_e c^2}$

$= 1{,}69\cdot 10^{-15}\,\text{m}$

2)

$\vec{j} = \rho\vec{v}$, $\vec{v} = \omega\cdot a\cdot\vec{e}_\varphi$

$\rho = \frac{e}{4/3\,\pi R^3}$



$r\sin\vartheta = a$

$\rho\vec{v} = \frac{3e}{4\pi R^3}\cdot r\sin\vartheta\,\omega\,\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = \frac{1}{2}\int[\vec{r}\times\vec{j}]\,d^3r$$

$$= \frac{1}{2}\int dr\begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\frac{3e}{4\pi R^3}\,r\sin\vartheta\,\omega\cdot\overbrace{r^2\sin\vartheta}^{\text{determinante}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3e}{4\pi R^3}\,\omega\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4\sin^2\vartheta\,\underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos^2\varphi + \sin\vartheta\sin^2\varphi \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}}$$

← 0, da $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ über eine Periode integriert wird.
←

$$= -\frac{1}{2}\frac{3e\cdot 2\pi}{4\pi R^3}\omega\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\vartheta \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} dr\, d\vartheta$$

$$\Rightarrow \mu_z = \frac{3}{4}\frac{e}{R^3}\omega\frac{1}{5}R^5 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta}_{4/3 \text{ nach Wolfram Alpha}}$$

$$= -\frac{e\omega R^2}{5}$$ ✓

(Minus vergessen mitzuziehen wegen negativer Elementarladung!)

3)
$$\mu = \mu_B = \frac{-e\hbar}{2m_e} = \frac{-e\omega R^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{5\hbar}{2m_e R^2}$$

$$v_{Äq} = \omega \cdot R_e = \frac{5\hbar}{2m_e R} = 1{,}712\cdot 10^{11}\,\frac{m}{s} >> c$$ ✓

Größer als c. Pauli machte dabei den Fehler, sich den Spin als klassische Eigenschaft vorzustellen. Man kann den Spin allerdings nicht als Drehung des Elektrons um seine eigene Achse verstehen. ✓ (Punktförmig!)

5/5

III) 1) $I = \frac{-ev}{2\pi r}$, denn $I = \frac{-e}{T} = -ef = -e\frac{\omega}{2\pi} = \frac{-ev}{2\pi r}$

Hier gilt: $\mu = |I| \cdot A = I \cdot r^2\pi = \frac{-ev}{2\pi r} r^2\pi = \frac{-ev\pi r}{2\pi}$
$= \frac{-evr}{2}$

$L = rmv$ und damit

Skalar Vektor

$\to \mu = \frac{-evr}{2} \cdot \frac{L}{L} = \frac{-evr}{2rmv} \cdot L \Rightarrow \vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{L}$

2) $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ $\quad \vec{M} = \mu \cdot B = \frac{-e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$

$q = I \cdot t$, $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{t}$ $\} q\vec{v} = I\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_L = \cancel{\ldots}\, I(\vec{a} \times \vec{B}) \Rightarrow F_L = I \cdot a \cdot B$

$= ev(\vec{e_\varphi} \times \vec{e_z} B) = evB(\vec{e_\varphi} \times \vec{e_z})$

$= evB \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot evB = evB\vec{e_r}$

$F = m\ddot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{z}\vec{e_z}$

$evB\vec{e_r} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + \underbrace{(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}_{0}\vec{e_\varphi} + \underbrace{\ddot{z}\vec{e_z}}_{0}$

$\Leftrightarrow evB\vec{e_r} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r}$ (✓)

$\Leftrightarrow evB = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$

Kreisbahn. Bedeutung d. Larmor-Frequenz?

Larmor-Frequenz: $\Omega_L = \frac{eB}{2m}$

2.5/3

IV

1) $\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = (\psi_n, \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \psi_n)$

$(\psi_{nlm}, \frac{1}{r} \psi_{nlm})$

gesucht $\hat{H}(\lambda)$: sodass $\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} = \frac{1}{r}$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}$ aus VL

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial e} = \frac{-2e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad ; \quad \frac{\partial E_n}{\partial e} = -\frac{4}{n^2} \frac{me^3}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_n}{\partial e} = (\psi_{nlm}, -\frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \psi_{nlm})$$

$$= -\frac{4}{n^2} \frac{me^3}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\psi_{nlm}, \frac{1}{r} \psi_{nlm}) = -\frac{4\pi\epsilon_0}{2e} \cdot \frac{-4}{n^2} \frac{me^3}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\psi_{nlm}, \frac{1}{r} \psi_{nlm}) = \frac{me^2}{n^2 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{1}{a_0 n^2}$$

wobei $a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$ der Bohrsche Radius

---

Wir setzen $n = l+1+j$. Die Energie ist unabhängig von l, also

$$E_n = -\frac{1}{(l+1)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial l} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} ((l+1)+l) = (2l+1) \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial l} = \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot 2(l+1)^{-3} = \frac{me^4}{\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2(l-1)^3}$$

$$= (\psi_{nlm}, (2l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2} \psi_{nlm})$$

$$\Leftrightarrow (\psi_{nlm}, \frac{1}{r^2} \psi_{nlm}) = \frac{2m}{\hbar^2(2l+1)} \cdot \frac{me^4}{\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2(l+1)^3}$$

$$= \frac{2m^2e^4}{\hbar^4(4\pi\epsilon_0)^2(l+1)^3(2l+1)}$$

$$= \frac{1}{a_0^2(l-1)^3(l+1/2)} = \frac{1}{a_0^2 n^3 (l+1/2)} = \frac{1}{a_0^2 n^3 (n+3/2)} \quad (\checkmark)$$

2) $4(q+1)\langle q\rangle - 4n^2(2q+1)\langle q-1\rangle + n^2 q\left[(2l+1)^2 - q^2\right]\langle q-2\rangle = 0$

mit $\langle q\rangle = \left(\psi_{nlm}, (r/a_B)^q \psi_{nlm}\right)$

Es gilt mit $q = -1$:

$$4(-1+1)\langle -1\rangle - 4n^2(-2+1)\langle -2\rangle + n^2(-1)\left[(2l+1)^2 - 1\right]\langle -3\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + 4n^2\langle -2\rangle - n^2\left[(2l+1)^2 - 1\right]\langle -3\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2\left(\psi_{nlm}, \left(\frac{a_0}{r}\right)^2 \psi_{nlm}\right) - n^2\left[(2l+1)^2 - 1\right]\left(\psi_{nlm}, \frac{a_0^3}{r^3}\psi_{nlm}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\psi_{nlm}, \frac{a_0^2}{r^2}\psi_{nlm}\right) = \left[(2l+1)^2 - 1\right]\left(\psi_{nlm}, \frac{a_0^3}{r^3}\psi_{nlm}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\psi_{nlm}, \frac{1}{r^3}\psi_{nlm}\right) = \frac{4}{a_0\left[(2l+1)^2 - 1\right]}\left(\psi_{nlm}, \frac{1}{r^2}\psi_{nlm}\right)$$

$$= \frac{1}{a_0^2 n^3 \underbrace{(n+1/2)}_{=l+1/2}} \cdot \frac{4}{a_0\left[(2l+1)^2 - 1\right]} = \frac{4}{a_0^3 n^3 (n+1/2)\left[(2l+1)^2 - 1\right]}$$

(V)

$$= \frac{1}{a_0^3 n^3} \frac{4}{2l + 6l^2 + 4l^3}$$

7/7