Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Marvin Zanke

Physik IV Blatt 6

I) $\hat{H}_S = -eE_0\hat{z} = -eE_0 r\cos\theta$

1) Es gilt: $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$

$$\Leftrightarrow \cos\vartheta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}(\vartheta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \hat{H}_S = -eE_0 r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_{10}$$

Der Operator $\hat{H}_S$ koppelt ganz analog zur Vorlesung (für linear polarisiertes Licht) Zustände mit $\Delta l = \pm 1$ und $\Delta m = 0$. Das ergibt sich aus der Auswahlregel und dem entsprechenden Integral in der anderen Basis.

?

2) $\Delta E = (\psi_{1s}, \hat{H}_S\psi_{1s}) = \int \psi_{1s}^*(-eE_0\hat{z})\psi_{1s}\, dV$

$$= -eE_0\int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\cos\theta\, \psi_{1s}^*\psi_{1s}$$

$$= -eE_0\int dr\, r^2 R_{1s}^* R_{1s} \cdot \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, \underbrace{\cos\theta\sin\theta}\, \underbrace{Y_{00}^* Y_{00}}_{\text{Konstante}}$$

Würde hier schon reichen, dass $\hat{z}$ negative Parität hat und $\psi_{1s}^*\psi_{1s}$ positive Parität als Betragsquadrat und das Integral damit verschwindet.

dieses Integral ist 0 nach Wolfram Alpha

$$\Rightarrow \Delta E = 0$$

3) Hier entnehme ich die Wellenfunktionen von Wikipedia. Da in ~~[illegible]~~ keiner einer kein $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ etc. vorkommt ist das Integral über die Kugeloberfläche sofort null, da $\int_0^\pi \sin\vartheta\cos\vartheta = 0$ (das $\sin\vartheta$ aus der Funkt.det.). Außerdem ist die Matrix für nicht komplexe Funktionen symmetrisch und für die komplexen gilt eine ähnliche Symmetrie. Nach Wikipedia gilt also:

7 | 2 | 3 | ... | 3
9 | 4 | 3,5 | ... | 16,5/20

Hinten

$$\psi_1 = \psi_{2,0,0} = \sqrt{\frac{1}{8a_0^3}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\left(-\frac{r}{a_0}+2\right)e^{-r/2a_0}$$

$$\psi_2 = \psi_{2,1,-1} = \sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}\cdot\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_3 = \psi_{2,1,0} = \sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\,\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$$

$$\psi_4 = \psi_{2,1,1} = -\sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$$

Damit gilt offensichtlich: $H_{12} = -H_{41}$, $H_{32} = -H_{43}$, $H_{24} =$
$H_{21} = -H_{14}$, $H_{23} = -H_{34}$, $H_{42} =$
$H_{13} = H_{31}$

Nun gilt sofort mit der Sortierung oben und Separierung nach Winkel- und Radialanteil mit Wolfram Alpha:
$\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta = 0$, $\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\sin\theta = 0$, $\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta\cos\theta = \frac{2}{3}$ (*)
und $\int_0^\pi \cos\theta\sin^3\theta = 0$, $\int_0^\pi \cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^\pi \cos^3\theta\sin\theta = 0$
sowie $\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} = 0$, $\int_0^{2\pi} e^{-2i\varphi} = 0$ folgt sofort,

$H_{12} = 0 = H_{41}$, $H_{14} = 0 = H_{21}$, $H_{11} = 0$, $H_{22} = 0$, $H_{33} = 0$, $H_{44} = 0$ weg. cos/sin Integrale
$H_{32} = 0 = H_{43}$, $H_{23} = 0 = H_{34}$ weg. $e^{i\varphi}$ Integralen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{42} = 0 = H_{24}$ wegen $\int e^{2i\varphi}$ Integration

Zu berechnen bleibt also H_{13}. Das ist aber relativ einfach, denn

$$-eE_0\int dV\,\psi_1^*\hat{z}\psi_3 = -eE_0\int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{8a_0^3}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(-\frac{r}{a_0}+2\right)e^{-r/2a_0}}_{\psi_1^*}\underbrace{r\cos\theta}_{z}\underbrace{\sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}}_{\psi_3}\underbrace{r^2\sin\theta}_{\det}$$

$$= -eE_0\frac{1}{\sqrt{8a_0^3}}\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{1}{24a_0^3}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\underbrace{\int_0^\infty dr\left(-\frac{r}{a_0}+2\right)\frac{r}{a_0}e^{-r/a_0}r^3}_{72a_0^4 \text{ nach Mathematica}}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi d\theta\cos^2\theta\sin\theta}_{2/3\ (*)}$$

$$= -eE_0\,\tfrac{4}{3}\pi\,72a_0^4\sqrt{\frac{3}{24\cdot 8}}\cdot\frac{1}{4\pi a_0^3} = -eE_0\frac{1}{3}72a_0\cdot\frac{1}{8} = -eE_0 3a_0$$

$$\Longrightarrow \hat{H}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3eE_0a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3eE_0a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Um nun die diagonalisierte Matrix zu bestimmen gehen wir folgendermaßen vor: 1 – Charakt. Polynom bestimmen → Eigenwerte ablesen → Eigenvektoren ausrechnen

Ich ~~[illegible]~~ arbeite erstmal mit $c := -3eE_0a_0$

$$\left|\begin{pmatrix} -t & 0 & c & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ c & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}\right| \underset{\text{nach 4. Zeile}}{\overset{\text{Entwickeln}}{=}} -t \left|\begin{matrix} -t & 0 & c \\ 0 & -t & 0 \\ c & 0 & -t \end{matrix}\right| \begin{matrix} -t & 0 \\ 0 & -t \\ c & 0 \end{matrix} = -t(-t^3 + c^2 t)$$

$$= t^2(t^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \ , \ \lambda_{3,4} = \pm c$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} cx_3 = 0 \\ cx_1 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ beliebig } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mp c & 0 & c & 0 \\ 0 & \mp c & 0 & 0 \\ c & 0 & \mp c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp c \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{obere Vorz.}} \begin{pmatrix} -c & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} cx_1 = +cx_3 \\ -cx_2 = 0 \\ -cx_4 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{untere Vorz.}} \begin{pmatrix} c & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} cx_1 = -cx_3 \\ cx_2 = 0 \\ cx_4 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geom. Vielfachheit $\hat{=}$ alg. Vielfachheit

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & c & \\ 0 & & & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & -3eE_0a_0 & \\ 0 & & & 3eE_0a_0 \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\text{EV: } \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_4}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

neue Basis

5. Da die Wellenfunktion für verschiedene Werte von l verschiedene Formen annimmt, beeinflusst das elektr. Feld diese auch unterschiedlich. So kann es dann passieren, dass eine Form, die in z-Richtung, wo das elektrische Feld seine einzige Komponente hat, unbeeinflusst bleibt, während andere ihre Symmetrie brechen.
Beim Zeeman-Effekt wird zusätzlich die Polarisation des Lichts beeinflusst, bei beiden Effekten entsteht aber eine Frequenzverschiebung. (Energieverschiebung der Niveaus).

6) Das elektrische Feld darf nur so groß werden, dass es das Coulomb-Feld nicht beeinflusst. Dieses Feld hat eine Stärke von $E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, wobei wir $r = a_0$ wählen, dort wo sich das Elektron im Grundzustand am wahrscheinlichsten aufhält. Es folgt dann: $E = 27{,}211 \frac{N}{C} \left[= \frac{V}{m}\right]$, $a_0 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m
Sagen wir mal, ab der Hälfte der Stärke wird es zu stark beeinflusst, also etwa $14 \frac{V}{m}$. $14 \frac{V}{m}$ ist ~ nix. Eher so $5 \cdot 10^{11} \frac{V}{m}$
Das Elektron wird dann lokalisiert und fliegt womöglich auch aus seinen gew. Bahnen raus. Seine Wahrscheinlichkeitswolke wird ~~Es~~ möglicherweise zerstört. Es wird dann ionisiert
? Das Atom.

9/10

II)

1. $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = [\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \hat{J}_z]$ $\qquad \hat{J}_z\hat{J}_z\hat{J}_z - \hat{J}_z\hat{J}_z\hat{J}_z = 0$

$$= [\hat{J}_x^2, \hat{J}_z] + [\hat{J}_y^2, \hat{J}_z] + \underbrace{[\hat{J}_z^2, \hat{J}_z]}_{=0}$$

$$[\hat{J}_x^2, \hat{J}_z] = [(\hat{L}_x + \hat{S}_x)^2, \hat{J}_z] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{S}_x\hat{L}_x + \hat{S}_x^2, \hat{J}_z]$$

$$= [\hat{L}_x^2, \hat{J}_z] + [\hat{L}_x\hat{S}_x, \hat{J}_z] + [\hat{S}_x\hat{L}_x, \hat{J}_z] + [\hat{S}_x^2, \hat{J}_z]$$

$$= [\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] + \cancel{[\hat{L}_x^2, \hat{S}_z]} + [\hat{L}_x\hat{S}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x\hat{S}_x, \hat{S}_z]$$
$$+ [\hat{S}_x\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{S}_x\hat{L}_x, \hat{S}_z] + \cancel{[\hat{S}_x^2, \hat{L}_z]} + [\hat{S}_x^2, \hat{S}_z]$$

$$= \hat{L}_x\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x\hat{L}_x + \hat{S}_x\hat{S}_x\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_x\hat{S}_x \quad (1)$$
$$+ \hat{L}_x\hat{S}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_x\hat{S}_x\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{L}_x\hat{S}_x \quad (2) \quad (*)$$
$$+ \hat{S}_x\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{S}_x\hat{L}_x + \hat{S}_x\hat{L}_x\hat{S}_z - \hat{S}_z\hat{S}_x\hat{L}_x \quad (3)$$

Außerdem gilt: $[L_i, S_j] = 0$

und $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

$\Leftrightarrow L_iL_j - L_jL_i = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \Leftrightarrow S_iS_j - S_jS_i = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$

(1) $\hat{L}_x(\hat{L}_z\hat{L}_x - i\hbar L_y) - (\hat{L}_x\hat{L}_z + i\hbar\hat{L}_y)\hat{L}_x + \ldots$ (analog)

$= -i\hbar\hat{L}_x\hat{L}_y - i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_x - i\hbar\hat{S}_x\hat{S}_y - i\hbar\hat{S}_y\hat{S}_x$

(2)

$(\hat{L}_z\hat{L}_x - i\hbar L_y)S_x - \hat{L}_z\hat{L}_x\hat{S}_x + \hat{L}_x(\hat{S}_z\hat{S}_x - i\hbar\hat{S}_y) - \hat{L}_x\hat{S}_z\hat{S}_x$

$= -i\hbar\hat{L}_y\hat{S}_x - i\hbar\hat{L}_x\hat{S}_y$

(3)

$\hat{S}_x\hat{L}_x\hat{L}_z - \hat{S}_x(\hat{L}_x\hat{L}_z + i\hbar\hat{L}_y) + \hat{S}_x\hat{S}_z\hat{L}_x - (\hat{S}_x\hat{S}_z + i\hbar\hat{S}_y)\hat{L}_x$

$= -i\hbar\hat{S}_x\hat{L}_y - i\hbar\hat{S}_y\hat{L}_x$

Nun gilt das ganze analog für $[\hat{J}_y^2, \hat{J}_z]$, wobei hier bloß x mit y vertauscht wird, wodurch sich jeweils eine Permutation im Epsilon-Tensor ergibt bei den Kommutatoren und dadurch

Zusätzlich zur Vertauschung ein Vorzeichenwechsel ergibt. Es folgt für ähnliche Terme wie oben dann:

(1) $i\hbar \hat L_y \hat L_x + i\hbar \hat L_x \hat L_y + i\hbar \hat S_y \hat S_x + i\hbar \hat S_x \hat S_y$

(2) $i\hbar \hat L_x \hat S_y + i\hbar \hat L_y \hat S_x$

(3) $i\hbar \hat S_y \hat L_x + i\hbar \hat S_x \hat L_y$ und man sieht sofort, dass sich immer ein Partner finden lässt mit entgegengesetztem Vorzeichen, sodass folgt:

$[\hat J^2, \hat J_z] = 0$

$$[\hat J^2, \hat L_z] = [\hat J_x^2 + \hat J_y^2 + \hat J_z^2, \hat L_z] = [\hat J_x^2, \hat L_z] + [\hat J_y^2, \hat L_z] + [\hat J_z^2, \hat L_z]$$

Dafür bemerkt man:

$$[\hat J_x, \hat L_z] = [\hat L_x + \hat S_x, \hat L_z] = [\hat L_x, \hat L_z] + [\hat S_x, \hat L_z] = -i\hbar \hat L_y$$

$$[\hat J_y, \hat L_z] = [\hat L_y, \hat L_z] + [\hat S_y, \hat L_z] = i\hbar \hat L_x$$

$$[\hat J_z, \hat L_z] = [\hat L_z, \hat L_z] + [\hat S_z, \hat L_z] = 0$$

Und damit folgt sofort:

$$[\hat J_x^2, \hat L_z] = \hat J_x \underbrace{\hat J_x \hat L_z} - \underbrace{\hat L_z \hat J_x} \hat J_x = \hat J_x (\hat L_z \hat J_x - i\hbar \hat L_y) - (\hat J_x \hat L_z + i\hbar \hat L_y) \hat J_x$$

$$= -i\hbar \hat J_x \hat L_y - i\hbar \hat L_y \hat J_x \qquad (*)$$

$$[\hat J_y^2, \hat L_z] = \hat J_y \underbrace{\hat J_y \hat L_z} - \underbrace{\hat L_z \hat J_y} \hat J_y = \hat J_y (\hat L_z \hat J_y + i\hbar \hat L_x) - (\hat J_y \hat L_z - i\hbar \hat L_x) \hat J_y$$

$$= i\hbar \hat J_y \hat L_x + i\hbar \hat L_x \hat J_y \qquad (*)$$

$$[\hat J_z^2, \hat L_z] = \hat J_z \hat J_z \hat L_z - \hat L_z \hat J_z \hat J_z = \hat J_z \hat L_z \hat J_z - \hat J_z \hat L_z \hat J_z = 0$$

$$\Rightarrow [\hat J^2, \hat L_z] = i\hbar (\hat L_y + \hat S_y) \hat L_x + i\hbar \hat L_x (\hat L_y + \hat S_y)$$

$$- i\hbar (\hat L_x + \hat S_x) \hat L_y - i\hbar \hat L_y (\hat L_x + \hat S_x)$$

$$= i\hbar \hat S_y \hat L_x + i\hbar \hat L_x \hat S_y - i\hbar \hat S_x \hat L_y - i\hbar \hat L_y \hat S_x$$

$$= 2i\hbar (\hat L_x \hat S_y - \hat S_x \hat L_y)$$

Analog folgt dies für $[\hat J^2, \hat S_z]$, indem man im oberen Schritt $(*)$ jedes $\hat L_y$ und $\hat L_x$ durch ein $\hat S_y$ und $\hat S_x$ ersetzt. Es folgt:

$[\hat J^2, \hat S_z] = 2i\hbar (\hat S_x \hat L_y - \hat S_y \hat L_x)$. L und S tauschen hier also Rollen.

Was bedeutet dies? Der Gesamtdrehimpuls und seine Projektion auf die z-Achse können gleichzeitig bestimmt werden.
Der Gesamtdrehimpuls und die Projektion des Drehimpulses und Spins auf die z-Achse sind jedoch nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar und aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation.
j in Kombination mit m_s oder m_l stellen also keine guten Quantenzahlen dar. ODER heißt das was anderes?

?

2) $j = 3/2$, $s = 1/2$

Erlaubte Werte von l sind $l = 1$ und $l = 2$, denn es muss gelten $\underbrace{j_{min} = |l-s|}_{l = j_{min}+s}$ und $\underbrace{j_{max} = l+s}_{l = j_{max}-s}$

$$\hat{\vec{J}}^2 = \hat{\vec{L}}^2 + \hat{\vec{S}}^2 - 2|\hat{\vec{L}}||\hat{\vec{S}}|\cos\vartheta$$

$$\Leftrightarrow \cos\vartheta = -\frac{1}{2}\,\frac{\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2}{|\hat{L}||\hat{S}|}$$

Es gilt:

$\hbar^2 l(l+1) = \hbar^2 \cdot 2$ oder $\hbar^2 \cdot 6$

$\hbar^2 j(j+1) = \hbar^2 \frac{15}{4}$

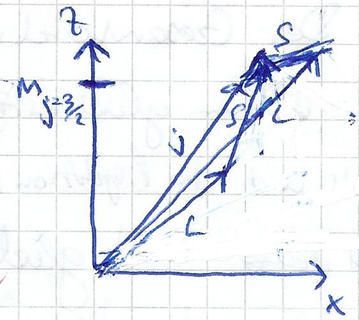
$\hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \, 3/4$ $\Rightarrow \cos\theta_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\frac{15}{4}\hbar^2 - 2\hbar^2 - 3/4\hbar^2}{\hbar^2\sqrt{2 \cdot 3/4}}$

$\Leftrightarrow \theta_1 = 114{,}09°$ (66°)

$\cos\theta_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{15/4\hbar^2 - 6\hbar^2 - 3/4\hbar^2}{\hbar^2\sqrt{6 \cdot 3/4}}$

$\Leftrightarrow \theta_2 = 45°$ (135°)

3) $j=3/2$, $m_j=3/2$, $s=1/2$



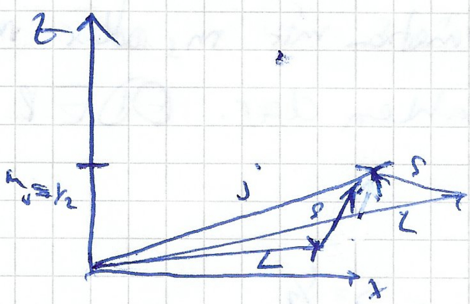
l wie aus voriger Aufgabe

$m_j = m_l + m_s$

$m_s = \pm 1/2$

$\Rightarrow m_l = 1 \vee m_l = 2$

$j=3/2$, $m_j=1/2$, $s=1/2$



$m_s=\pm 1/2$

$\Rightarrow m_l=0 \vee m_l=1$

l wie aus voriger Aufgabe

Gemeinsamkeiten

- gleicher Wert für l, heißt L ist gleich lang
- S ist gleich groß und damit auch seine möglichen Projektionen ?
- $\vec{L}$ präzediert um $\vec{J}$

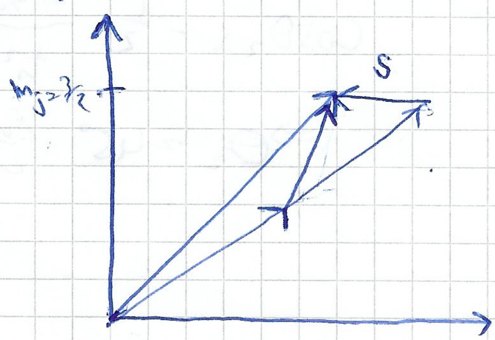
Unterschiede

- Die Projektion des Drehimpulsvektors ist unterschiedlich, dadurch dass die Projektion des Gesamtdrehimpulses anders ist.

4) $^2D_{3/2} \to {}^2P_{3/2}$; $n=2$, $j=3/2$, $l_1=2$, $l_2=1$

n bleibt gleich, j bleibt gleich. l verringert sich um 1. ~~Das heißt aber auch, dass der Spin umspringt: $s_1=-1/2$, $s_2=1/2$~~

Wähle $m_j=3/2$, $m_s=\pm 1/2$ $\Rightarrow m_l=1 \vee m_l=2$ f



Ist genau der Übergang aus Aufgabe 2) von 45° auf 114°.

Nimm lieber $m_j=1/2$. Der Spin flippt ja nicht von alleine!

(⇒ man braucht 2 Photonen. Eins für ΔL, eins für ΔS)
Der Spin-flip ist ein magn. Übergang

4/6

III)

1) Das innere ~~Magnetfeld~~ Magn. Moment des Elektrons wechselwirkt mit dem Magnetfeld, das durch die Bewegung des Protons – aus Sicht des Elektrons – entsteht. ~~Dies hängt von der Stellung~~ Die Stärke hängt von der Stellung des Spins und dem Bahndrehimpuls ab. ✓

Die potentielle Energie eines magnetischen Moments im B-Feld ist gegeben durch: $E_{Pot} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, damit ist der Hamilton-Operator:

$$\hat{H}_{SB} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{\mu} = -g_s \frac{e}{2m}\vec{S} \quad , \quad B = \frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{v}$$

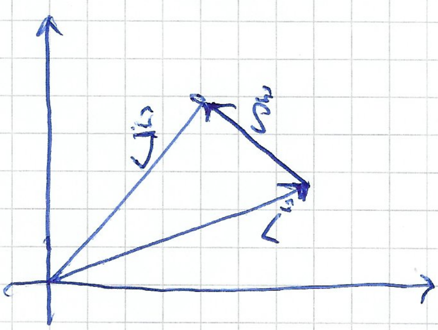
$$\Rightarrow H_{SB} = g_s \frac{e}{2m}\vec{S}\cdot\frac{1}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\underbrace{\vec{r}\times\vec{v}}_{\frac{\vec{L}}{m}}$$

$$= g_s \frac{e^2}{2m^2c^2\, 4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{S}\vec{L}$$

~~Hier geht ein $\frac{1}{r}$ verloren?~~ Nevermind

$$= g_s \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2m^2c^2}\cdot\frac{1}{r^3}\vec{S}\cdot\vec{L}$$ ✓

der Faktor ist zu viel (Thomas Faktor!)



2) $I = -\frac{e v}{2\pi r}$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Drehimpuls ist gequantelt: $L = n\hbar = m\omega R^2 = mvR$

$\Leftrightarrow v = \frac{n\hbar}{mR}$

$\Rightarrow B = -\frac{\mu_0}{2\pi R} \cdot \frac{e}{2\pi R} \cdot \frac{n\hbar}{mR} = -\frac{\mu_0 e n\hbar}{4\pi^2 R^3} \overset{R = n a_0}{=} -\frac{\mu_0 e\hbar}{4\pi^2 a_0^3} \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow B = -9{,}082 \cdot 10^{-31}\,T_{\text{Tiny}}$ für $n=2$ und $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\,m$

Aus der VL gilt: $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$ mit $\vec{M}(\vec{r}) = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} |\psi(r)|^2$

Kleiner als unser Wert geht wohl kaum ! Stimmt. Richtig wäre ~0.4T

$(\Rightarrow B = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ mit $\vec{v}$ aus Bohrmodell, $n=2)$

3) $^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$

Da $j = 1/2$ ein Zustand näher am Kern ist, hat dieser geringen Energiedifferenz zum Grundzustand, also gehört λ_1 zu $^2P_{1/2}$.

$\lambda_1 = 589{,}6\,nm$, $\lambda_2 = 589{,}0\,nm$

$E = hf = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta E = E_1 - E_2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$

$= 3{,}432 \cdot 10^{-22}\,J = 0{,}00214\,eV$

$\frac{\Delta E}{\mu} = B = \frac{\Delta E}{\mu_B \cdot m} = 38{,}13\,T$ für $m=1$ $\mu_B = 9 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$

Groß gegen Wasserstoff.

3.5/4