

## Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:

<https://www.physics-and-stuff.com/>

**Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.**

Dieses Werk von [Marvin Zanke](#) ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

20.6.2015

# Physik IV Blatt 7

Marrin Zanke

7  
16.5/20

I) 1. Ursprünglich von de-Broglie gefunden, dass auch Teilchen bzw. Materie eine Welleneigenschaft (Wellenlänge) zuzuordnen ist, wurde das Prinzip von Heisenberg und Schrödinger in ihrer äquivalenten Formulierung der Quantenmechanik wieder aufgegriffen. Ein Teilchen hat demnach auch immer Welleneigenschaften und kann damit insbesondere mit anderen Materiewellen interferieren. ✓  
 Ihm ist eine Wellenlänge und eine Funktion  $\psi(\vec{x}, t)$  zugeordnet, ✓  
 welche man so deuten kann, dass  $\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2$  ✓  
 die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt und  $\int \rho(\vec{x}, t) dV = 1$  gilt, ✓  
 da das Teilchen irgendwo im Raum sein muss.

Messgrößen sind in der Quantenmechanik Operatoren und wirken auf eine Wellenfunktion. Befindet sich ein Teilchen in einem (stationären) Eigenzustand, so wird der Messwert der zugehörige Eigenwert zum Eigenzustand sein. ✓  
 In einem Überlagerungszustand entscheidet das Teilchen sich für einen Eigenzustand, <sup>es hat ein Bewusstsein!!</sup> wovon Eigenwert dann der Messwert ist. ✓

$\langle \hat{A} \rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{x}) \hat{A} \psi(\vec{x}) = (\psi, \hat{A} \psi)$ . Man nennt die Messwerte auch Observablen.

Schrodinger glg:  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\vec{x}) \psi$  ✓  
 $\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}) = \hat{H} \psi$ , dann  
 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$  ✓

Hamiltonoperator gibt die Gesamtenergie eines Systems an. ✓

$\frac{\hat{p}^2}{2m}$  ist dabei die kinetische Energie des Teilchens und  $V$  die potentielle Energie (nach dem Korrespondenzprinzip)

Ersetzt man die Variablen der klassischen Physik einfach durch die quantenmechanischen Operatoren.

Man hat also die Gesamtenergie auf die Wellenfunktion angewandt ist gleich der Zeitentwicklung der Wellenfunktion.  $\Delta$  ist dabei der Laplace und  $\partial_t$  die zeitliche Ableitung.

Ebene Welle.  $\psi(\vec{x}) = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$  ✓

Elektromagnetische Wellen bestehen immer aus einem gekoppelten E-Feld und B-Feld, während Materiewellen bloß eine Wellenfunktion beschreiben. Außerdem gilt  $\int |\psi(\vec{x}, t)|^2 dV = 1$ , während das für eine ebene Welle nicht gilt, da sie nicht normierbar ist.  $\int |e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}|^2 dV = \infty$ . Materiewellen treten also bloß als Wellenpakete auf. OK

8.5/70

2. Grobstruktur: Hier gilt schon nach Bohr, dass es verschiedene Energieniveaus für verschiedene Quantenzahlen  $n$  gibt.

Allerdings liegt eine Entartung bzgl.  $l$  und  $m_l$  vor und der Spin (magn. Moment der Elektronen und Protonen)

wird vernachlässigt. Dadurch hat der Hamiltonoperator folgende einfache Form:  $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$

Lösung der Schrödingerglg mit Kugelkoordinaten und

Einführen eines Bahndrehimpulsoperators liefert die Energieniveaus von Wasserstoff für die Grobstruktur. Gute Quantenzahlen sind

hier wie angedeutet:  $n, l, m_l$ , wobei  $l$  der Eigenwert

des Bahndrehimpulsoperators zum Quadrat ist und  $m_l$  Eigenwert

von  $\hat{L}_z$ , der Projektion des Bahndrehimpulsoperators auf die

z-Achse.  $n$  läuft von 1 bis  $\infty$ . Energien:  $\propto \alpha^2 \approx \frac{1}{10000} \approx 0,0001 \approx 1 \cdot 10^{-4}$

Bei der Feinstruktur kommen 3 weitere Effekte hinzu.

Zum einen erhält man einen zusätzlichen potentiellen Energie Term zum Hamiltonoperator als Folge der Spin-Bahn-Kopplung.

Dies folgt daraus, dass das ~~Kern~~ (aus Sicht des Elektrons) kreisendes Proton ein Magnetfeld erzeugt (Spez. Relativitätstheorie)

Das Elektron hat auf Grund des Spins ein magnetisches Moment. Ein magnetisches Moment in einem Magnetfeld besitzt eine potentielle Energie  $H_{SB} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$  und  $\vec{\mu}$  hängt wiederum von Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  ab. Eine weitere Korrektur kommt durch die Näherung der Ruheenergie (Ruhemasse bzw. Vernachlässigen von

Genauer Termen höherer Ordnung. Man muss hier eigentlich die relativistische kinetische Energie betrachten. Die dritte Korrektur ist der

Darwin-Term, der in guter Näherung bloß für s und p Orbitale nicht verschwindet. Gute Quantenzahlen sind hier  $n, l, S, j, m_j$ .  $S$  ist der Eigenwert des quadrierten Spin-Operators,  $j$  Eigenwert des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  und  $m_j$  dessen Projektion auf die z-Achse. Energie  $\sim \alpha^4 \approx 1 \cdot 10^{-8}$

Hyperfeinstruktur berücksichtigt nun zusätzlich noch die Kopplung des magnetischen Moments (Spin) des Kerns mit dem Magnetfeld durch

Stimmt das wieder?   
 das Elektron. Und auch die Wechselwirkung von dem magnetischen Moment des e<sup>-</sup> und dem magnetischen Moment (Spin) von Elektron und Proton.

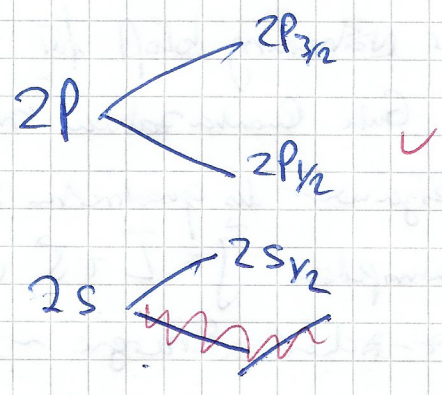
Gute Quantenzahlen sind  $n, l, S, j, f, m_f$ , wobei  $f$  Eigenwert zu  $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$  und  $\vec{I}$  der Spin des Kerns ist.  $m_f$  ist wieder

Eigenwert zur Projektion auf z-Achse. Es gilt auch immer  $-x \leq m_x \leq x$  für alle  $m$ . Energien  $\sim 1 \cdot 10^{-11}$  da  $\frac{m_p}{m_e} \sim 10^3$

Bei Alkali-Atomen ist ~~das~~ genau ein Valenzelektron auf der äußersten Schale. Da die inneren Schalen komplett abgeschlossen sind verschwindet hier sowohl Bahndrehimpuls als

auch Gesamtspin. Das heißt es reicht die Effekte des  
 äußersten Elektrons zu betrachten. Man muss jetzt allerdings  
 beachten, dass die inneren Elektronen das Coulombfeld teilweise  
 abschirmen. Es wird also die Entlastung bzgl.  $l$  teilweise  
 aufgehoben, das Elektronen mit größerem  $l$  auch wahrscheinlicher  
 weiter außen angetroffen sind. Die Feinstruktur aufspaltung bleibt  
 hier ähnlich zu Wasserstoff da die gleichen Effekte zum Tragen  
 kommen.

~~Der Zustand  $2P_{3/2}$  existiert nicht in der Feinstruktur aufspaltung.  
 Der mittlere Zustand muss also weggelassen werden.  
 Außerdem ist  $2S_{1/2}$  falsch. Hier muss es  $2S$  und  $2S_{3/2}$   
 heißen~~



Sowie: Das Bild verwechelt  
 den Zeeman-Effekt mit der HFS

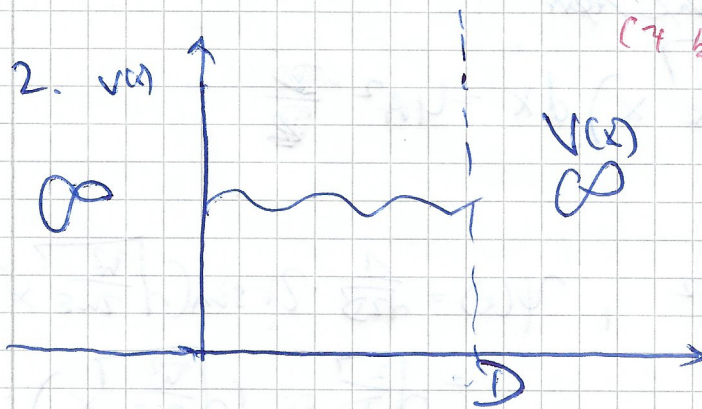
II) 1.  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$  ist die kinetische Energie des Teilchens bzw. der Materiewelle.  $V(x)$  ist die potentielle Energie.

$E$  ist dabei die Gesamtenergie des Systems. Es handelt sich also um die stationäre Schrödingerglg. für den diskreten Energieeigenwert  $E$  und Eigenfunktion  $\psi(x)$  (ortsfunktionabhängig).

Die Wellenfunktion repräsentiert damit also anschaulich eine stehende Welle, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit sich zeitlich nicht ändert. *OK. Beschreibe doch genau, was  $\psi$  ist!*

3.5.19

( $\psi$  beschreibt den Teilchenzustand)



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad V(x) = 0 \text{ für einen Bereich}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

Ansatz:  $\psi(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \lambda^2 \psi(x)$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 = E \quad \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}}$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A e^{i \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}} x} + B e^{-i \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}} x} \quad (\psi) \text{ (Wellenfunktion Lösung)}$$

Da  $V(x) = \infty$  für die äußeren Bereiche kann die Welle hier auch nicht tunneln und verschwindet deshalb. Das Stetigkeitsprinzip muss also  $\psi(0) = 0$  und  $\psi(D) = 0$  gelten

$$\psi(x) = A e^{i\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x} + B e^{-i\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x}$$

$$0 = \psi(0) = A + B \Rightarrow A = -B$$

$$\Rightarrow \psi(x) = A \left( e^{i\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x} - e^{-i\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x} \right) \\ = 2iA \sin\left(\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x\right)$$

$$0 = \psi(D) = 2iA \sin\left(\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}D\right) \quad (V)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E^2}{2mE}}D = n\pi$$

$$\Rightarrow \frac{E^2}{2mE}D^2 = n^2\pi^2 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 D^2}{2m n^2} \quad (V)$$

Außerdem  $\int_0^D 4A^2 \sin^2\left(\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x\right) dx = 1$  legt A als Normierung fest. *Kürztest*

$$1 = 4A^2 \int_0^D \sin^2\left(\sqrt{\frac{E^2}{2mE}}x\right) dx = 4A^2 \frac{D}{2}$$

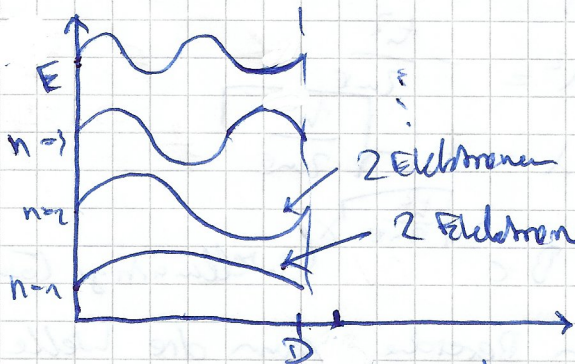
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2D}} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{n^2} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{D^2}{\pi^2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2D}} \cdot 2i \sin\left(\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}}x\right)$$

*hier sollte der Aha-Moment kommen, dass etwas selbsterklärend ist.*

da  $i$  bloß ein Phasenfaktor  $e^{i\pi/2}$  ist.

3. Nach dem Pauli-Prinzip dürfen 2 Elektronen nie in ihrem Quantenzustand (Quantenzahlen vollständig übereinstimmen). *Elektron ist ein Fermion*
- Das heißt wir haben Platz für 2 Elektronen pro Energieniveau, da diese sich in ihrem Spin unterscheiden können  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ .



Zuerst Energieniveaus gefüllt mit entweder up oder down spin Elektron. Dann das nächste Elektron mit gleicher Energie aber anderem Spin. Dann  $n=2$  usw.

Der Elektronen spin ist insofern wichtig, als dass er eine Entartung bzgl. der Energien darstellt und damit nach dem Pauli-Prinzip einen weiteren Freiheitsgrad erlaubt.

4.  $E_F(z)$ . für  $z=1,2$  bzw.  $E_1$

$z=3,4$   $E_2$

$z=5,6$   $E_3$

$$E_n = \frac{1}{\Gamma(z)^2} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{D^2}{\pi^2} \quad (4)$$

wobei  $\Gamma \dots$  die ~~Gamma~~  
Gammafunktionswert ist.  $\checkmark$

4/19

5.  $E_n = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{n^2} d^2 m c^2$

Es gilt mit Schalen:  $n, l, m_l, m_s$ :  $l \leq n$

$$-l \leq m_l \leq l$$

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

D.h. für  $n$  gilt als Anzahl der möglichen unterzubringenden

Elektronen:

$$\begin{aligned} (He)_n &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m_l=-l}^l 2 = 2 \left[ \sum_{l=0}^{n-1} \left( 2 \sum_{m_l=1}^l 1 + 2 \right) \right] \\ &= 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 2) \\ &= 4 \frac{n(n-1)}{2} + 2n \\ &= \frac{4n^2 - 4n + 4n}{2} = 2n^2 - 2n + 2n \end{aligned}$$

$$= 4 \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m_l=1}^l 1 + 4 \sum_{l=0}^{n-1} 1$$

$$= 4 \sum_{l=0}^{n-1} l + 4n = 4 \frac{n(n-1)}{2} + 4n = \frac{4n^2 - 4n}{2} + 4n = \frac{4n^2 + 4n}{2}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} (2l) \cdot 2 + 2 = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) \checkmark$$

Der Symmetrisch um  
0.

$$= 2 \left[ \sum_{l=0}^{n-1} l + \sum_{l=0}^{n-1} 1 \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + n \cdot 2$$

$$= 2(n^2 - n) + 2n = 2n^2 \checkmark$$



$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{n^2} \alpha^2 m c^2$$

$$\alpha = \frac{z}{2n}$$

$$z = 1, 2 \Rightarrow n=1$$

$$z = 3, 4, \dots, 10 \Rightarrow n=2$$

$$z = 11, \dots, 30 \Rightarrow n=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 = 2$$

Unterschiede: Hier passen nicht immer gleich viele Elektronen pro Niveau in eine Schale sondern für größere  $n$  sehr viel mehr. ✓ Gemeinsamkeiten sind dass die Entartung mit dem Spin gleich 2 ist. Außerdem ist ein Unterschied, dass es noch weitere Entartung mit  $l$  und  $m_l$  gibt. ✓

wenn  $l=0$  ist  
 Spin  $\frac{1}{2}$  auch  
 nicht anders :)

3/4

Eigentlich war gefragt: - Abh. von  $E$  von der Anzahl d.  $e^-$   
 - " " " " Kernladung