Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Physik IV Blatt 8

Marvin Zanke

$\geq$ 17.5/20

1. Kalium hat die Ordnungszahl 19. Das 19 Elektron ist das Valenzelektron in der 4s-Schale, da die 18 Elektronen alle anderen Niveaus vollständig auffüllen und 4s das ~~niedrigste~~ Energienächste / geringste ist. ✓ $\Rightarrow$ [AR] 4s $^2S_{1/2}$

Da wir über elektrische Dipolübergänge reden muss gelten:

$$\Delta l = \pm 1 \,, \quad \Delta j = 0, \pm 1$$

$$E_{n,l} = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \frac{1}{(n-\delta_l)^2}$$

$$\Delta E = E_{n',l'} - E_{n,l} = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \left(\frac{1}{(n'-\delta_{l'})^2} - \frac{1}{(n-\delta_l)^2}\right)$$

$$= +\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \left(\frac{1}{(n-\delta_l)^2} - \frac{1}{(n'-\delta_{l'})^2}\right)$$

$$E_{Ph} = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow h\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \left(\frac{1}{(n-\delta_l)^2} - \frac{1}{(n'-\delta_{l'})^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{(n-\delta_l)^2} - \frac{1}{(n'-\delta_{l'})^2}}_{=:k} = \frac{2h}{\alpha^2 m_e c}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$\lambda = 769{,}9\,nm$	$k = 0{,}1183$
$\lambda = 766{,}5\,nm$	$k = 0{,}1188$
$\lambda = 404{,}7\,nm$	$k = 0{,}2251$ (*)
$\lambda = 404{,}4\,nm$	$k = 0{,}2252$
$\lambda = 344{,}7\,nm$	$k = 0{,}2642$
$\lambda = 344{,}6$	$k = 0{,}2643$

Für den 4s Zustand gilt: $n = 4$, $l = 0$, $s = 1/2$, $j = 1/2$

Für angeregte Zustände gibt es zwei mögliche Werte für j: $l-s$ und $l+s$. In unserem Fall betrachten wir $l = 1 \hat{=} p$ und damit $j = 1/2, 3/2$ $\Rightarrow$

4s $\to$ 4p ✓

4s $\to$ 5p

4s $\to$ 6p

Für die Quantendefekte gilt:

$$\frac{1}{(4-\delta_s)^2} - \frac{1}{(4-\delta_p)^2} = \frac{0{,}1183 + 0{,}1188}{2} = 0{,}11855 \quad \text{I}$$

$$\frac{1}{(4-\delta_s)^2} - \frac{1}{(5-\delta_p)^2} = \frac{0{,}2251 + 0{,}2252}{2} = 0{,}22515 \quad \text{II}$$

$$\frac{1}{(4-\delta_s)^2} - \frac{1}{(6-\delta_p)^2} = \frac{0{,}2642 + 0{,}2645}{2} = 0{,}26435 \quad \text{III}$$

I − II:

$$-\frac{1}{(4-\delta_p)^2} + \frac{1}{(5-\delta_p)^2} = -0{,}1066$$

$$\Rightarrow \delta_p = 1{,}78 \text{ oder } 4{,}50 \text{ (Mathematica)}$$

I − III analog: $\delta_p = 1{,}77$ oder $4{,}96$

II − III analog: $\delta_p = 1{,}74$ oder $5{,}55$

$$\Rightarrow \delta_p = \frac{1{,}78 + 1{,}77 + 1{,}74}{3} = 1{,}76 \checkmark$$

δ_p einsetzen in I liefert: $\delta_s = 2{,}33$ oder $5{,}77$

" II " : $\delta_s = 2{,}33$ oder $5{,}77$

" III " : $\delta_s = 2{,}33$ oder $5{,}77$

$\rightarrow \delta_s = 2{,}33 \checkmark$ weil $5{,}77$ nicht physikalisch ist (größer als n!)

Für die nächsten beiden Übergänge gilt:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{Ph}} = \frac{hc}{\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \left(\frac{1}{(n-\delta_s)^2} - \frac{1}{(n-\delta_p)^2}\right)} = 282{,}727\,\text{nm für } n=7$$

[1/]

273,6 nm für n=8

sollte eher ~320 nm liegen

~300 nm

2. $^2P_{1/2} \leftrightarrow {}^2D_{3/2}$ ✓ $\quad$ $^2D_{5/2} \leftrightarrow {}^2F_{7/2}$ ✓

$^2P_{3/2} \leftrightarrow {}^2D_{5/2}$ ✓

$^2P_{3/2} \leftrightarrow {}^2D_{3/2}$ ✓

$^2P_{3/2} \leftrightarrow {}^2S_{1/2}$ ✓

$^2P_{1/2} \leftrightarrow {}^2S_{1/2}$ ✓

H) für S sind mögliche Werte: $S=1$ oder $S=0$

1. falls $S_1 = 1/2$, $S_2 = 1/2$

Eigenzustände: $\hat{S}^2 \psi_{S_1,S_2} = \hbar^2 S(S+1)\psi_{S_1 S_2}$

$\Rightarrow$ $\psi_{0,0}$ mit EW 0

$\psi_{1,-1}$, EW: $2\hbar^2$

$\psi_{1,0}$, EW: $2\hbar^2$ } 3-fach entartet

$\psi_{1,1}$, EW: $2\hbar^2$

2. Analog zu Wasserstoff gilt hier:

$$E_0^{H} = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 = -13{,}6\,eV$$

$$\Rightarrow E_0 = 2^2 E_0^H = 4E_0^H = -54{,}4\,eV$$

Potentielle Energie von zwei Ladungsverteilungen ist gegeben durch

Woher?

$$W_{ges} = \frac{1}{\boxed{8}\pi\epsilon_0}\int d^3r_1\, d^3r_2 \frac{\rho(\vec{r}_1)\,\rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad \rho(\vec{r}_i) = e\,|\psi(\vec{r}_i)|^2$$

$$\psi(\vec{r}_i) = \sqrt{\frac{8}{\pi a_0^3}}\, e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$\rho(\vec{r}_i) = e\frac{8}{a_0^3\pi} e^{-\frac{4r}{a_0}}$$

$$= e^2 \frac{8}{\pi^3 a_0^6 \epsilon_0}\int e^{-\frac{4r_1}{a_0}} e^{-\frac{4r_2}{a_0}} \frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} d^3r_1 d^3r_2$$

$$= \frac{8e^2}{\epsilon_0\pi^3 a_0^6}\int \frac{e^{-\frac{4}{a_0}(r_1+r_2)}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} d^3r_1 d^3r_2$$

$$= \frac{8e^2}{\epsilon_0 \pi^3 a_0^6}\cdot\frac{20\pi^2 a_0^5}{4^5} = \frac{e^2\cdot 20}{2\cdot 64\cdot\pi a_0\epsilon_0} = \frac{5}{32\pi}\frac{e^2}{a_0\epsilon_0} = 2{,}725\cdot 10^{-18}\,J$$

$= 17{,}01\,eV$

Faktor 2 daneben

$$\Rightarrow E_0 + E_c = -37{,}39\,eV \;(\checkmark)$$

Ist deutlich geringer als der experimentelle Wert von $-24{,}6\,eV$, d.h. stärker gebunden. Die schwächere Bindung rührt daher, dass durch das Feld der Elektronen das Feld des Kerns zum Teil abgeschirmt wird (→ nicht mehr so stark gebunden). Dies haben wir nicht berücksichtigt. (✓)

Hier folgt aber aus einem abgeschw. Feld eine stärkere Bindung (Das liegt am Faktor 2 oben). Eigentlich ist das abgeschw. Feld schuld an der schwächeren Bindung mit $E_0 + E_c \approx 77\,eV$

3. $1s^2\,{}^1S_0 \Rightarrow n=1,\ l=0,\ j=0 \Rightarrow S=0$

bei elektrischem Dipolübergang muss gelten:

$$\Delta l = 1,\quad \Delta m = 0, \pm 1$$

$$\Rightarrow\ l' = 1,\ \Rightarrow n' = 2$$

$1s^1 2s^1\,{}^1P_1$ ~~$2p^6\,{}^1P_1$~~ Zustand mit niedrigster Energie.

~~Das wäre eine volle p [illegible]~~

5.5/6

III) $\hat{F}^2 = (\hat{I} + \hat{J})^2$, $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

1. $$[\hat{F}^2, \hat{J}^2] = [\hat{I}^2 + 2\hat{I}\cdot\hat{J} + \hat{J}^2, \hat{J}^2] = \underbrace{[\hat{I}^2, \hat{J}^2]}_{0,\ \text{versch. Räume}} + 2[\hat{I}\cdot\hat{J}, \hat{J}^2] + \underbrace{[\hat{J}^2, \hat{J}^2]}_{0,\ \text{trivial}}$$

$$= 2[\hat{I}_x\hat{J}_x + \hat{I}_y\hat{J}_y + \hat{I}_z\hat{J}_z, \hat{J}^2]$$

$$= 2\left([\hat{I}_x\hat{J}_x, \hat{J}^2] + [\hat{I}_y\hat{J}_y, \hat{J}^2] + [\hat{I}_z\hat{J}_z, \hat{J}^2]\right)$$

$$= 2\big(\hat{I}_x[\hat{J}_x, \hat{J}^2] + [\hat{I}_x, \hat{J}^2]\hat{J}_x + \hat{I}_y[\hat{J}_y, \hat{J}^2] + [\hat{I}_y, \hat{J}^2]\hat{J}_y + \hat{I}_z[\hat{J}_z, \hat{J}^2] + [\hat{I}_z, \hat{J}^2]\hat{J}_z\big)$$

$$= 2\Big(\underbrace{[\hat{I}_x, \hat{J}^2]}_{\underbrace{[\hat{I}_x,\ \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2]}_{0,\ \text{weil } [\hat{I}_\ell, \hat{J}_m] = 0}}\hat{J}_x + \underbrace{[\hat{I}_y, \hat{J}^2]}\hat{J}_y + \underbrace{[\hat{I}_z, \hat{J}^2]}\hat{J}_z\Big)$$

analog

$$\underline{\underline{= 0}}$$

$$[\hat{F}^2, \hat{I}^2] = [\hat{I}^2 + 2\hat{I}\cdot\hat{J} + \hat{J}^2, \hat{I}^2] = 2[\hat{I}\cdot\hat{J}, \hat{I}^2]$$

$$= 2[\hat{I}_x\hat{J}_x + \hat{I}_y\hat{J}_y + \hat{I}_z\hat{J}_z, \hat{I}^2]$$

$$= 2\big(\hat{I}_x[\hat{J}_x, \hat{I}^2] + [\hat{I}_x, \hat{I}^2]\hat{J}_x + \hat{I}_y[\hat{J}_y, \hat{I}^2] + [\hat{I}_y, \hat{I}^2]\hat{J}_y + \hat{I}_z[\hat{J}_z, \hat{I}^2] + [\hat{I}_z, \hat{I}^2]\hat{J}_z\big)$$

$$= 2\Big(\hat{I}_x\underbrace{[\hat{J}_x, \hat{I}^2]}_{\underbrace{[\hat{J}_x,\ \hat{I}_x^2 + \hat{I}_y^2 + \hat{I}_z^2]}_{0,\ \text{weil } [\hat{J}_\ell, \hat{I}_m] = 0}} + \hat{I}_y\underbrace{[\hat{J}_y, \hat{I}^2]}_{0} + \hat{I}_z\underbrace{[\hat{J}_z, \hat{I}^2]}_{0}\Big)$$

analog

$$\underline{\underline{= 0}}$$

$$[\hat{F}^2, \hat{I}\cdot\hat{J}] = [\hat{I}^2 + 2\hat{I}\cdot\hat{J} + \hat{J}^2, \hat{I}\cdot\hat{J}]$$

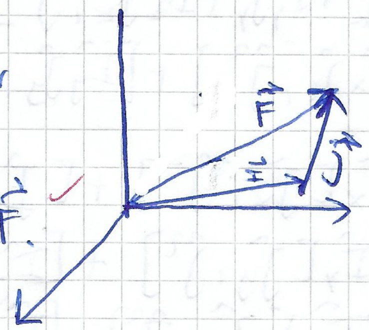
$$= \underbrace{[\hat{I}^2, \hat{I}\cdot\hat{J}]}_{0,\ \text{siehe } 2.)} + 2\underbrace{[\hat{I}\cdot\hat{J}, \hat{I}\cdot\hat{J}]}_{=0,\ \text{trivial}} + \underbrace{[\hat{J}^2, \hat{I}\cdot\hat{J}]}_{0,\ \text{siehe } 1.)}$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

2. Die Guten Quantenzahlen (gleichzeitig scharf bestimmbar und damit auch System der Eigenfunktionen, das Basis bildet) sind nach Aufgabe 1.: n, l, s, j, i, f, m_f

da $\hat{I}\cdot\hat{J} \propto \hat{H}_{HFS}$ und dies nach den Vertauschungsrelationen gilt.

gleichzeitig scharf bestimmbar sind: Länge $\vec{I}, \vec{J}, \vec{F}$ und eine Komponente von $\vec{F}$.



(eine Komponente von $\vec{J}$ und $\vec{I}$, falls $\hat{H}_{HFS}$ nicht betrachtet wird?)

3. $\hat{F}^2 = (\hat{I} + \hat{J})^2 = \hat{I}^2 + \hat{J}^2 + 2\hat{I}\hat{J}$

$\Leftrightarrow \hat{I}\cdot\hat{J} = \frac{1}{2}(\hat{F}^2 - \hat{I}^2 - \hat{J}^2)$

$E_{HFS} = \langle \hat{H}_{HFS} \rangle = (\Psi_{f,m_f,j,i}, \hat{H}_{HFS} \Psi_{f,m_f,j,i})$

$= (\Psi_{f,m_f,j,i}, \frac{A}{2}\hbar^2 [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)] \Psi_{f,m_f,j,i})$

$= \frac{A\hbar^2}{2}[f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)]$

4. $n=1, l=0, s=1/2, i=1/2 \Rightarrow j = 1/2$

$\Rightarrow f = 0, 1$, da $|j-i| \leq f \leq j+i$

$E_{HFS} = h \cdot 1{,}4\,GHz$

$E_{th} = \frac{f}{2} k_B T$, $f=3$ bei Atomen

$\Leftrightarrow T = \frac{2}{3k_B} E_{th} = 44{,}8\,mK$

5.

8/10