Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Physik IV Blatt 9

Marvin Zanke

Σ 73,5/120

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega_R\cos(\omega t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar\Omega_R\cos(\omega t) \\ \hbar\Omega_R\cos(\omega t) & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Psi = c_e(t)\Psi_e + c_g(t)\Psi_g = \begin{pmatrix} c_e(t) \\ c_g(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{c}_e(t)\tilde{\Psi}_e + \tilde{c}_g(t)\tilde{\Psi}_g = \begin{pmatrix} \tilde{c}_e e^{i\omega t/2} \\ \tilde{c}_g e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_e e^{i\omega t/2} \\ c_g e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar\Omega_R\cos(\omega t) \\ \hbar\Omega_R\cos(\omega t) & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_e(t) \\ c_g(t) \end{pmatrix} = i\hbar\begin{pmatrix} \dot{c}_e(t) \\ \dot{c}_g(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{i\omega_0}{2} & -i\Omega_R\cos(\omega t) \\ -i\Omega_R\cos(\omega t) & i\frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_e(t) \\ c_g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c}_e(t) \\ \dot{c}_g(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot{c}_e(t) = -\frac{i\omega_0}{2}c_e(t) - i\Omega_R\cos(\omega t)c_g(t)$$

$$\dot{c}_g(t) = -i\Omega_R\cos(\omega t)c_e(t) + i\frac{\omega_0}{2}c_g(t)$$

$$\tilde{H}\tilde{\Psi} = i\hbar\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_e e^{i\omega t/2} \\ c_g e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} = i\hbar\begin{pmatrix} \frac{i\omega}{2}c_e e^{i\omega t/2} + \dot{c}_e e^{i\omega t/2} \\ -\frac{i\omega}{2}c_g e^{-i\omega t/2} + \dot{c}_g e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_e e^{i\omega t/2} \\ c_g e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} = i\hbar\begin{pmatrix} e^{i\omega t/2}\left(c_e\frac{i\omega}{2} - \frac{i\omega_0}{2}c_e(t) - i\Omega_R\cos(\omega t)c_g(t)\right) \\ e^{-i\omega t/2}\left(-c_g\frac{i\omega}{2} - i\Omega_R\cos(\omega t)c_e(t) + i\frac{\omega_0}{2}c_g(t)\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha c_e e^{i\omega t/2} + \beta c_g e^{-i\omega t/2} = i\hbar e^{i\omega t/2}\left[c_e\left(\frac{i\omega}{2} - \frac{i\omega_0}{2}\right) + c_g\left(-i\Omega_R\cos(\omega t)\right)\right]$$

$$\beta^* c_e e^{i\omega t/2} + \gamma c_g e^{-i\omega t/2} = i\hbar e^{-i\omega t/2}\left[c_g\left(-\frac{i\omega}{2} + \frac{i\omega_0}{2}\right) + c_e\left(-i\Omega_R\cos(\omega t)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \alpha = i\hbar\left(\frac{i\omega}{2} - \frac{i\omega_0}{2}\right), \quad \beta = i\hbar e^{i\omega t}\left(-i\Omega_R\cos(\omega t)\right)$$

$$\beta^* = i\hbar e^{-i\omega t}\left(-i\Omega_R\cos(\omega t)\right), \quad \gamma = i\hbar\left(-\frac{i\omega}{2} + \frac{i\omega_0}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega), \quad \beta = \frac{\hbar}{2}\cdot 2e^{i\omega t}\Omega_R\cos(\omega t), \quad \gamma = \frac{\hbar}{2}(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\hbar}{2} \cdot 2 e^{i\omega t} \Omega_R \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \Omega_R \frac{\hbar}{2} e^{i\omega t}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \approx \frac{\hbar}{2}\Omega_R \quad (\checkmark)$$

↗ rotating wave approx.

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -(\omega_0-\omega) & \Omega_R \\ \Omega_R & (\omega-\omega_0) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega_R \\ \Omega_R & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \omega - \omega_0$$

↗ das fehlt

Die Ursprüngliche Annahme für Ψ_e / Ψ_g war auf dem Blatt falsch, daher sollte das Ergebnis eigentlich anders aussehen... :)

2.) Stationäre Hamilton-Gl.:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \Omega_R = 0 \rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_g = \frac{\hbar}{2}\Delta \checkmark = \frac{\hbar}{2}(\omega - \omega_0) \checkmark\checkmark$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_e = -\frac{\hbar}{2}\Delta \checkmark = \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega) \checkmark\checkmark$$

$\omega > \omega_0 \Rightarrow E_e < E_g$. Der Grundzustand liegt dann energetisch höher.

3.)
$$\hat{H}\psi = E_\pm \psi \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega_R \\ \Omega_R & \Delta \end{pmatrix}\psi = E_\pm \psi$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\hbar}{2}\Delta - \lambda & \frac{\hbar}{2}\Omega_R \\ \frac{\hbar}{2}\Omega_R & \frac{\hbar}{2}\Delta - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{\hbar}{2}\Delta - \lambda\right)\left(\frac{\hbar}{2}\Delta - \lambda\right) - \frac{\hbar^2}{4}\Omega_R^2$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4}\Delta^2 + \frac{\hbar}{2}\Delta\lambda - \frac{\hbar}{2}\Delta\lambda + \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}\Omega_R^2$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4}\Delta^2 + \lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4}\Omega_R^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{\hbar^2}{4}(\Delta^2 + \Omega_R^2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} \Rightarrow E_+ = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} \checkmark$$
$$E_- = -\frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}$$

4.)
$$\hat{H}\psi_\pm = E_\pm \psi_\pm \Leftrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\Delta & \Omega_R \\ \Omega_R & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta_\pm \\ \sin\vartheta_\pm \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\begin{pmatrix} \cos\vartheta_\pm \\ \sin\vartheta_\pm \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} -\cos\vartheta_\pm \Delta + \Omega_R \sin\vartheta_\pm &= \pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\cos\vartheta_\pm \quad (1) \\ \Omega_R \cos\vartheta_\pm + \Delta\sin\vartheta_\pm &= \pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\sin\vartheta_\pm \quad (2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin\vartheta_\pm = \frac{\pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\cos\vartheta_\pm + \Delta\cos\vartheta_\pm}{\Omega_R} = \frac{\cos\vartheta_\pm(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})}{\Omega_R}$$

$$\cos\vartheta_\pm = \frac{\pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\sin\vartheta_\pm - \Delta\sin\vartheta_\pm}{\Omega_R} = \frac{\sin\vartheta_\pm(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})}{\Omega_R}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\vartheta_\pm}{\cos\vartheta_\pm} = \tan\vartheta_\pm = \frac{\cos\vartheta_\pm(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})}{\sin\vartheta_\pm(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})} = \frac{1}{\tan\vartheta_\pm}\frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}}{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\vartheta_\pm = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}}{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}} = \frac{(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})(+\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})}{(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2})}$$
$$= \frac{(\pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} + \Delta)^2}{\Omega_R^2} \checkmark \Leftrightarrow \tan\vartheta_\pm = \frac{\pm\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} + \Delta}{\Omega_R}$$

Plot von $\tan\theta_\pm = \frac{\pm\sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2}+\Delta}{\Omega_R} = \frac{\Delta}{\Omega_R} \pm \sqrt{1+\frac{\Delta^2}{\Omega_R^2}}$ unten

Für $|\Delta| \gg \Omega_R$ gilt: $\tan\theta_\pm = \frac{\Delta}{\Omega_R} \pm \frac{\Delta}{\Omega_R}$

$$\Rightarrow \tan\theta_+ = 2\frac{\Delta}{\Omega_R} \xrightarrow{\Delta\to\infty} \infty$$

$$\tan\theta_- = 0$$

$\tan\theta_\pm = \frac{\sin\theta_\pm}{\cos\theta_\pm} \Rightarrow \cos\theta_+ = 0 \Rightarrow |\sin\theta_+| = 1$, da $\tan\theta_+ \to \infty$

$\sin\theta_- = 0 \Rightarrow |\cos\theta_+| = 1$, da $\tan\theta_- = 0$

$$\Rightarrow \psi_+ = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \psi_- = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Also gilt für $|\Delta| \gg \Omega_R$, dass $\psi_+ \to \psi_g$
$\psi_- \to \psi_e$

wobei $\Delta \gg \Omega_R$ für ψ_+ und $-\Delta \ll \Omega_R$ für ψ_-.

Die Zustände des gekoppelten Systems gehen in die der ungekoppelten über, da $|\Delta| = |\omega - \omega_0| \gg \Omega_R$ und damit nicht mehr mit der Resonanzfrequenz gekoppelt wird.

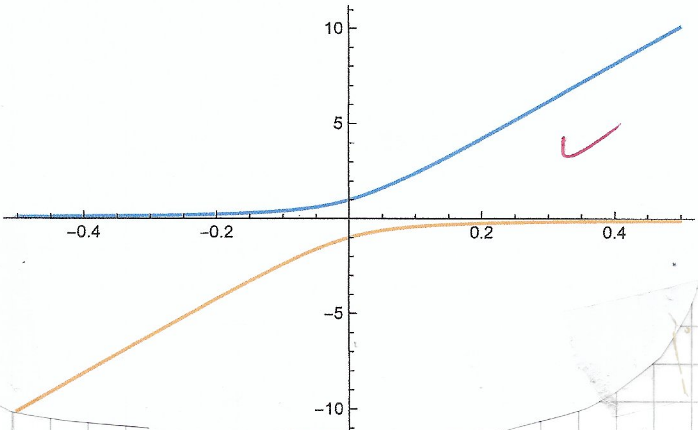
$$\tan\theta_\pm = \frac{\sin\theta_\pm}{\cos\theta_\pm} = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2}}{\Omega_R} \rightarrow \Omega_R = \cos\theta_\pm,$$
$$\Delta \pm \sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2} = \sin\theta_\pm$$

Normieren liefert: $\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(\Delta^2+\Omega_R^2 \pm \Delta\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2})}} \begin{pmatrix}\Omega_R \\ \Delta \pm \sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}\end{pmatrix}$

```
p[Δ_, Ω_] := Δ/Ω + Sqrt[Δ^2/Ω^2 + 1]

m[Δ_, Ω_] := Δ/Ω - Sqrt[Δ^2/Ω^2 + 1]

Plot[{p[Δ, 0.1], m[Δ, 0.1]}, {Δ, -0.5, 0.5}]
```



Bisher der schönste aller Plots aus der Gruppe. Aber:

ACHSENBESCHRIFTUNG, bitte :)

5) $\delta E(\Delta, \Omega_R) = E_-(\Delta, \Omega_R) - E_g(\Delta)$

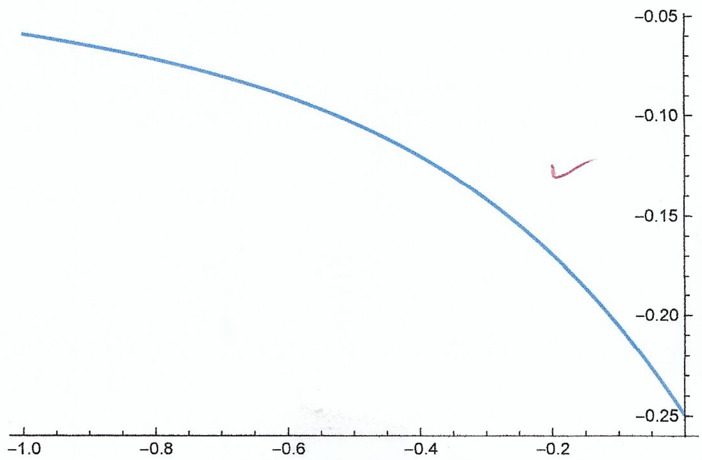
$$= -\frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2} - \frac{\hbar}{2}\Delta = -\frac{\hbar}{2}\left(\Delta + \sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2}\right)$$

6) $\delta E(\Delta, \Omega_R) = E_+(\Delta, \Omega_R) - E_g(\Delta)$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{\Delta^2+\Omega_R^2} - \Delta\right)$$

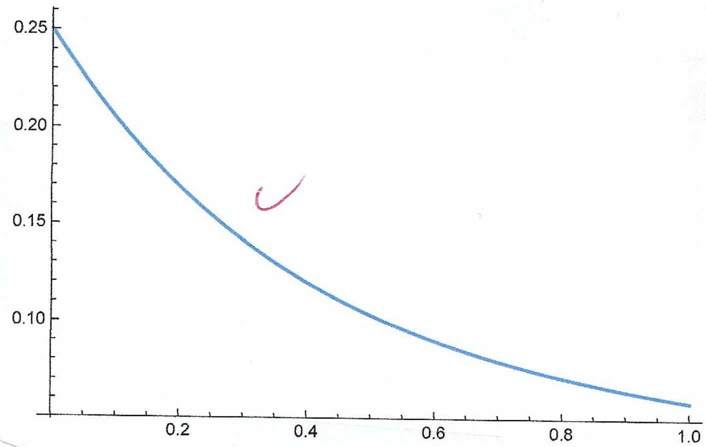
```
δ1[Δ_, Ω_] := -1/2 (Δ + Sqrt[Ω^2 + Δ^2])

Plot[δ1[Δ, 0.5], {Δ, -1, 0}]
```




```
δ2[Δ_, Ω_] := 1/2 (Sqrt[Ω^2 + Δ^2] - Δ)

Plot[δ2[Δ, 0.5], {Δ, 0, 1}]
```



7) Für $\Delta < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ erzeugen wir ein energetisch negatives (attraktives) Potential, welches die Energieniveaus des Atoms absenkt (E_-). Dadurch ist das ganze System in einem energetisch niedrigeren und damit bevorzugten Zustand. Man kann es so auf den Bereich des Laserstrahles eingrenzen und damit abbremsen. Insbesondere werden Atome mit anderer Eigenfrequenz von dem Potential abgestoßen falls $\Delta > 0$ gilt.

$\lambda_R = 589\,nm$, $\lambda = 1064\,nm$

$\langle d_{eg} \rangle = 3ea_0$, $P = 1W$, $d = 100\mu m$

$\Delta = \omega - \omega_0 = 2\pi c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_R}\right) = -1{,}429 \cdot 10^{-3}\, s^{-1}$

Ich kriege hier $-7{,}43 \cdot 10^{15}$ Hz... Just sayin'

Es gilt: $I = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$

$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c |E_0|^2 \Leftrightarrow |E_0| = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{8P}{c\epsilon_0 \pi d^2}} = 3{,}096 \cdot 10^5\, \frac{V}{m}$

$\Rightarrow \Omega_R = 7{,}470 \cdot 10^{10}\,Hz = \langle d_{eg} \rangle \cdot E_0/\hbar$, $\langle d_{eg} \rangle = 3ea_0$

$\delta E = -\frac{\hbar}{2}\left(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}\right) = -3{,}936 \cdot 10^{-24}\,J = -2{,}457 \cdot 10^{-5}\,eV$ (V)

10^{-24} J sind etwas viel, $= -24{,}57\,\mu eV$

eher so 10^{-28} J. ~~[illegible]~~

Außerdem verwendet man hier $\delta E = \frac{\hbar \Omega_R^2}{4\Delta}$

6.5/10

III) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Omega_R\\0\\-\Delta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ (*)

1) $t \to \frac{t}{\Omega_R} \Leftrightarrow t\Omega_R = \tau \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \Omega_R \Leftrightarrow d\tau = \Omega_R\, dt$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\, \Omega_R \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Omega_R\\0\\-\Delta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-\Delta/\Omega_R\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$

Bitte ausmultiplizieren. Der Tutor ist faul :)

2) (a) $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-w\\v\end{pmatrix}$

$\Rightarrow u(\tau) = \text{Const}$

$\frac{d}{d\tau} v = -w$, $\frac{d}{d\tau} w = v$ $\Big\}$ $w'' = -w$, $v'' = -v$

$u(\tau=0) = 0$, $v(\tau=0) = 0$, $w(\tau=0) = -1$

$v(\tau) = A\cos(\tau) + B\sin(\tau)$ und mit $v(\tau=0) = 0$ folgt $A = 0$

$\Rightarrow v(\tau) = B\sin(\tau)$

$\frac{d}{d\tau} v(\tau) = B\cos(\tau) = -w \Leftrightarrow w(\tau) = -B\cos(\tau)$

und mit $w(\tau=0) = -1$ folgt $B = 1$

$\Rightarrow v(\tau) = \sin(\tau)$, $w(\tau) = -\cos(\tau)$

Weil $\tau = \Omega_R t$ gilt, folgt, dass es eine Rabi-Oszillation ist.

Rotiert um die u-Achse.

(b) $\Delta = \Omega_R \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v\\-u-w\\v\end{pmatrix} =$

$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} u = v$ ①

$\frac{d}{d\tau} v = -(u+w) \Rightarrow v'' = -u' - w'$ ②

$\frac{d}{d\tau} w = v$ ③

①, ③ in ② $\leadsto$ $v'' = -2v$

$\Rightarrow v(\tau) = A\cos(\sqrt{2}\tau) + B\sin(\sqrt{2}\tau)$

$v(\tau=0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow v(t) = B\sin(\sqrt{2}t)$

$u(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{B}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) + C_u$ (1)

$w(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{B}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t) + C_w$ (2)

$0 = u(0) = -\frac{B}{\sqrt{2}} + C_u \Leftrightarrow C_u = \frac{B}{\sqrt{2}} \Rightarrow u(t) = \frac{B}{\sqrt{2}}(1-\cos(\sqrt{2}t))$

$-1 = w(0) = -\frac{B}{\sqrt{2}} + C_w \Leftrightarrow C_w = \frac{B}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow w(t) = \frac{B}{\sqrt{2}}(1-\cos(\sqrt{2}t)) - 1$

$= u(t) - 1$

$\sqrt{u^2+v^2+w^2} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{B^2}{2}(1-\cos(\sqrt{2}t))^2 + B^2\sin^2(\sqrt{2}t) + \left(\frac{B}{\sqrt{2}}(1-\cos(\sqrt{2}t)) - 1\right)^2} = 1$

$\Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\,(1-\cos(\sqrt{2}t)) \\ 1/\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}t) \\ 1/2\,(1-\cos(\sqrt{2}t)) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2(t/\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}t) \\ -\cos^2(t/\sqrt{2}) \end{pmatrix}$

$\Delta = 10\Omega_R$: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10v \\ -10u - w \\ v \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}u &= 10v \\ \frac{d}{dt}v &= -10u - w \\ \frac{d}{dt}w &= v \end{aligned}\right\}$ Mathematica $\Rightarrow \Omega_R = \sqrt{101}$ ✓

Die Plots sind auf separaten Zetteln hinten (zu viel zum einkleben).

Die Oszillations-Frequenz ist größer bei $\Delta = 10\Omega_R$ ($\sqrt{101}\Omega_R$ zu $\sqrt{2}\Omega_R$)

Rotationsachse näher am Grundzustand. ✓

Erklärung: Die von außen anregende Frequenz ist wegen $\Delta = \omega - \omega_0$ größer und die Wechselwirkung ist geringer weil es nicht mehr im Resonanzbereich liegt.

c) $\Delta = (-10 + \frac{20}{1000}t)\Omega_R = (0{,}02t - 10)\Omega_R$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}02t - 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10 - 0{,}02t)v \\ (0{,}02t - 10)u - w \\ \end{pmatrix}$ ✓

```
Solve[Sqrt[(x^2/2 (1 - Cos[Sqrt[2] t])^2 + x^2 (Sin[Sqrt[2] t])^2 + (x/Sqrt[2] (1 - Cos[Sqrt[2] t]) - 1)^2)] == 1, x]
```

$$\left\{\{x \to 0\},\ \left\{x \to \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{Cos}[\sqrt{2}\,t]}{1 - 2\,\mathrm{Cos}[\sqrt{2}\,t] + \mathrm{Cos}[\sqrt{2}\,t]^2 + \mathrm{Sin}[\sqrt{2}\,t]^2}\right\}\right\}$$

```
Simplify[(Sqrt[2] - Sqrt[2] Cos[Sqrt[2] t])/(1 - 2 Cos[Sqrt[2] t] + Cos[Sqrt[2] t]^2 + Sin[Sqrt[2] t]^2)]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

```
Simplify[1/Sqrt[2] Sin[Sqrt[2] t]]
```

$$\frac{\mathrm{Sin}[\sqrt{2}\,t]}{\sqrt{2}}$$

```
Simplify[1/2 - 1/2 Cos[Sqrt[2] u] - 1]
```

$$-\mathrm{Cos}\left[\frac{u}{\sqrt{2}}\right]^2$$

```
lsg = DSolve[{u'[τ] == 10 v[τ], v'[τ] == -10 u[τ] - w[τ],
   w'[τ] == v[τ], u[0] == 0, v[0] == 0, w[0] == -1}, {u[τ], v[τ], w[τ]}, τ]
```

$$\left\{\left\{u[\tau] \to -\frac{10}{101}\left(-1 + \mathrm{Cos}[\sqrt{101}\,\tau]\right),\ v[\tau] \to \frac{\mathrm{Sin}[\sqrt{101}\,\tau]}{\sqrt{101}},\ w[\tau] \to \frac{1}{101}\left(-100 - \mathrm{Cos}[\sqrt{101}\,\tau]\right)\right\}\right\}$$

```
c = (-10/101 (-1 + Cos[Sqrt[101] τ]))^2 + (Sin[Sqrt[101] τ]/Sqrt[101])^2 + (1/101 (-100 - Cos[Sqrt[101] τ]))^2
```

$$\frac{\left(-100 - \mathrm{Cos}[\sqrt{101}\,\tau]\right)^2}{10\,201} + \frac{100\left(-1 + \mathrm{Cos}[\sqrt{101}\,\tau]\right)^2}{10\,201} + \frac{1}{101}\mathrm{Sin}[\sqrt{101}\,\tau]^2$$

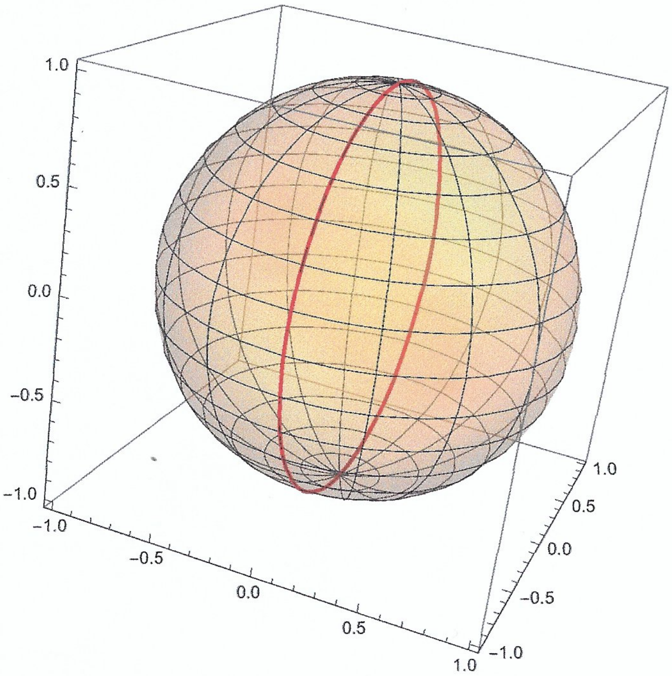
```
p1 = ParametricPlot3D[{0, Sin[τ], -Cos[τ]},
   {τ, 0, 2 π}, PlotRange → All, PlotStyle → Red];

pK = ParametricPlot3D[{Sin[Θ] Cos[ϕ], Sin[Θ] Sin[ϕ], Cos[Θ]},
   {Θ, 0, π}, {ϕ, 0, 2 π}, PlotRange → All, PlotStyle → Opacity[0.3]];
```

Uuuund... was ist nun was? :)

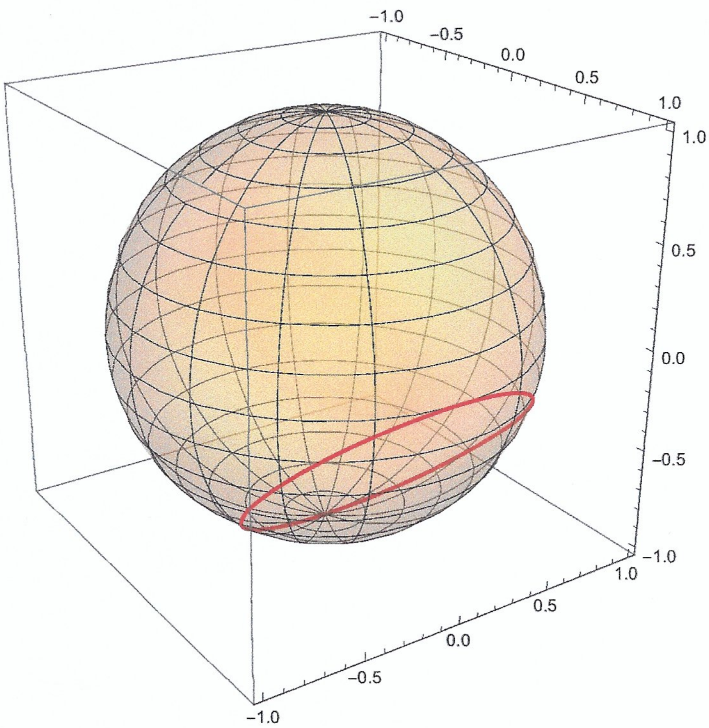
5/10

```
Show[p1, pK]
```



$$p2 = \text{ParametricPlot3D}\left[\left\{\text{Sin}\left[\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right]^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Sin}\left[\sqrt{2}\,\tau\right], -\text{Cos}\left[\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right]^2\right\}, \{\tau, 0, 4\pi\}, \text{PlotRange} \to \text{All}, \text{PlotStyle} \to \text{Red}\right];$$

```
Show[p2, pK]
```



$$\text{p3} = \text{ParametricPlot3D}\left[\left\{-\frac{10}{101}\left(-1+\text{Cos}\left[\sqrt{101}\;\tau\right]\right)\Big/\sqrt{\text{c}},\; \frac{\text{Sin}\left[\sqrt{101}\;\tau\right]}{\sqrt{101}}\Big/\sqrt{\text{c}},\; \frac{1}{101}\left(-100-\text{Cos}\left[\sqrt{101}\;\tau\right]\right)\Big/\sqrt{\text{c}}\right\},\; \{\tau, 0, 4\pi\},\; \text{PlotRange}\to\text{All},\; \text{PlotStyle}\to\text{Red}\right];$$

```
Show[p3, pK]
```