Hinweis

Das vorliegende Protokoll wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde dieses Protokoll von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit des vorliegenden Protokolls! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

11.05.2015 **Versuch 104: Physisches Pendel**

In diesem Versuch geht es um den Trägheitsmoment. Es wird eine kreisförmige Scheibe betrachtet, die in einem Aufhängepunkt (ungleich des Schwerpunkts) befestigt ist, ausgelenkt wird und dann bezüglich ihrer Schwingungsdauer vermessen wird. Dadurch kann man sowohl ihren Trägheitsmoment, als auch die Erdbeschleunigung g bestimmen. Da die Achse den Abstand a vom Schwerpunkt hat kommt auch der Steinersche Satz zum Einsatz.

Größen, Formeln, Begriffe

Drehmoment: Das Analogon zur Kraft bei Drehbewegungen. Die Kraft greift also nicht mehr ~~bloß~~ am Schwerpunkt an und versetzt den Körper dadurch in eine Drehbewegung. Es zählt dabei nur der Anteil der Kraft senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Aufhängepunkt und Angriffspunkt.

$\vec{M} = \vec{r} \times F$, $[M] = N \cdot m$

Trägheitsmoment: Widerstand eines Körpers gegenüber der Änderung seiner Rotation. Analogon zur Masse bei Drehbewegungen. $I = \int r^2 \, dm$ $[I] = kg\,m^2$

Drehimpuls: Im abgeschlossenen System eine Erhaltungsgröße. Das Analogon zum Impuls bei Drehbewegungen. Ein Drehmoment kann den Drehimpuls ändern. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $[L] = kg\,\frac{m^2}{s} = Nms$

Newtonsche Bewgl.: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{M} = I\vec{\alpha}$

Außerdem für unseren Fall: $\vec{M} = -D\varphi = -amg\sin\varphi \approx -amg\varphi$

Erhaltungssätze: Energie, Impuls, Drehimpuls, Schwerpunkt

Steinerscher Satz: $\theta = \theta_S + ma^2$. Der Trägheitsmoment für eine Drehungsachse durch eine zum Körper-schwerpunkt parallele Achse ist gleich dem Trägheitsmoment für die Achse durch seinen Schwerpunkt plus dem Verschiebungsterm.

Schwingungsdauer T: $T^2 = 4\pi^2 \frac{\theta}{D} = 4\pi^2 \frac{\theta_{Sch} + ma^2}{amg}$

Trägheitsmoment Scheibe: $\theta_{Sch} = \frac{1}{2} m r^2$

Richtkonstante: In unserem Fall: $D = a \cdot mg$

Geradengleichung: $aT^2 = \frac{4\pi^2 \theta_{Sch}}{mg} + \frac{4\pi^2}{g} a^2$

Aufgabe 104.A

$$\theta = \theta_S - \sum_{i=1}^{n} \theta_i = \theta_S - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i^2}_{\text{Trägheitsmoment (Punkt-) Loch, Abstand } a_i}$$

$$= \theta_S - \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \pi \cdot d \cdot \rho \cdot a_i^2$$

wobei ρ die Dichte ist und d die Dicke der Scheibe. Hierbei nimmt man an, dass die ganze Masse der Löcher jeweils in einem Punkt konzentriert liegt.

Anderer Weg:

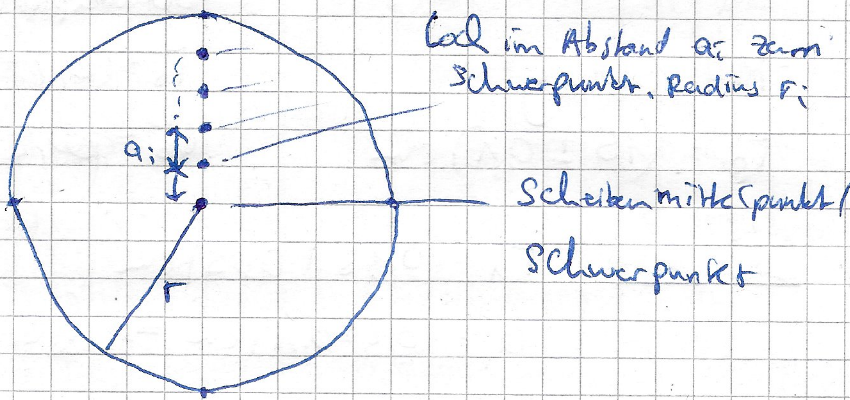
$$\theta = \theta_S - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_{Loch_i} + \theta_{St, Loch_i}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 + m_i a_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho r_i^2 \pi d r_i^2 + \rho r_i^2 \pi d a_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 - \rho \pi d \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^4}{2} + r_i^2 a_i^2\right)$$

Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung



Wir messen für jedes Loch als Drehachse die Schwingungsdauer T über 10 Perioden. Die Amplitude soll nur wenige Grad sein. Anhand einer Fit-Geraden kann man sowohl die Erdbeschleunigung als auch das Eigenträgheitsmoment bestimmen. Diese Werte werden mit den Literaturwerten bzw. theoretisch erwarteten Werten abgeglichen. Außerdem wird ein Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer und dem Drehachsenabstand hergestellt.

Messung

Ausmaße der Scheibe:

$M = 1112\,g$

$r_S = (15 \pm 0{,}1)\,cm$

Schwerpunktsloch

$r_0 = (0{,}2 \pm 0{,}05)\,cm$

$d = (0{,}2 \pm 0{,}05)\,cm$

Loch 1: $r_1 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_1 = (3{,}2 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow (10{,}24 \pm 0{,}64)\,cm^2 = a_1^2$

Loch 2: $r_2 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_2 = (6{,}0 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_2^2 = (36 \pm 1{,}2)\,cm^2$

Loch 3: $r_3 = (0{,}3 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_3 = (7{,}5 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_3^2 = (56{,}25 \pm 1{,}5)\,cm^2$

Loch 4: $r_4 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_4 = (9{,}0 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_4^2 = (81 \pm 1{,}8)\,cm^2$

Loch 5: $r_5 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_5 = (10{,}0 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_5^2 = (100 \pm 2)\,cm^2$

Loch 6: $r_6 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_6 = (11{,}5 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_6^2 = (132{,}25 \pm 2{,}3)\,cm^2$

Loch 7: $r_7 = (0{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_7 = (13{,}3 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_7^2 = (176{,}89 \pm 2{,}66)$

Loch 8: $r_8 = (0{,}3 \pm 0{,}05)\,cm$

$a_8 = (14{,}5 \pm 0{,}1)\,cm \Rightarrow a_8^2 = (210{,}25 \pm 2{,}9)$

wobei der Fehler im Radius 0,05 cm ist, da wir den Durchmesser errechnet haben und diesen durch 2 geteilt haben.

104 a

Loch	T_{10}/s ± 0,5	T/s ± 0,05	aT^2 / $\frac{cm}{s^2}$
1	12,15	1,215	4,724 ± 0,4073
2	9,84	0,984	5,81 ± 0,5983
3	9,40	0,940	7,05 ± 0,7105
4	9,11	0,911	8,199 ± 0,8241
5	9,14	0,914	9,14 ± 0,9178
6	9,29	0,929	9,925 ± 1,0718
7	9,33	0,933	11,578 ± 1,2439
8	9,41	0,941	12,84 ± 1,3673

Auswertung:

Wir errechnen die Werte für a^2 inklusive Fehlerrechnung mittels Gauß.

$$\Delta(a^2) = \sqrt{(2a\,\Delta a)^2} = 2a\,\Delta a$$ und tragen die Werte für a^2 auf die linke Seite dazu.

Für den Fehler in T ergibt sich analog zu der Rechnung auf der linken Seite nach Gauß:

$$\Delta T = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\Delta T_{10}\right)^2} = \frac{\Delta T_{10}}{10}$$

Für aT^2 ergibt sich: $\Delta y = \sqrt{(2aT\,\Delta T)^2 + (T^2\,\Delta a)^2}$

Aus der Fit-Geraden können wir nun die Erdbeschleunigung g und das Eigenträgheitsmoment Θ_{sa} bestimmen.
Dafür bestimmen wir zuerst die Steigung m und Δm.

$$m = \frac{13-7}{190-50} = \frac{3}{70} \approx 0{,}0429$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{14{,}5-5}{190-30} = 0{,}0594 \\ m_2 &= \frac{10{,}5-7}{145-30} = 0{,}0304 \end{aligned}\right\} \Delta m = 0{,}0145$$

Nun gilt $\frac{4\pi^2}{g} = m \iff g = \frac{4\pi^2}{m}$, wobei g in der Einheit $\frac{cm}{s^2}$ gegeben ist.

$$\Rightarrow \Delta g = \sqrt{\left(-\frac{1}{m^2} \cdot 4\pi^2 \Delta m\right)^2} = \frac{4\pi^2 \Delta m}{m^2}$$

$$\Rightarrow g = (920{,}243 \pm 311{,}038)\ \frac{cm}{s^2}$$

$$\iff g = (9{,}202 \pm 3{,}1104)\ \frac{m}{s^2}$$

Für den Trägheitsmoment lesen wir die Y-Achsenabschnitte ab.

$$Y_0 = 4{,}8\,cms^2 \mathrel{\hat{=}} 0{,}048\,ms^2$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= 3{,}2 \\ Y_2 &= 6{,}1 \end{aligned}\right\} \Delta Y_A = 1{,}45\,cms^2 \mathrel{\hat{=}} 0{,}0145\,ms^2$$

$$Y_A = \frac{4\pi^2 \Theta_{sa}}{mg} \iff \Theta_{sa} = \frac{mgY_A}{4\pi^2}$$

Es gilt mit Gauß:

$$\Delta\Theta_{Sd} = \sqrt{\left(\frac{mg}{4\pi^2}\Delta y_A\right)^2 + \left(\frac{m\,y_A}{4\pi^2}\Delta g\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Theta_{Sd} = (0{,}01244 \pm 0{,}00564)\ kgm^2$$

Alternativ kann man auch mit dem Literaturwert für g arbeiten und erhält:

$$\Delta\Theta_{Sd} = \frac{mg}{4\pi^2}\Delta y_A, \quad \text{da } \Delta g = 0$$

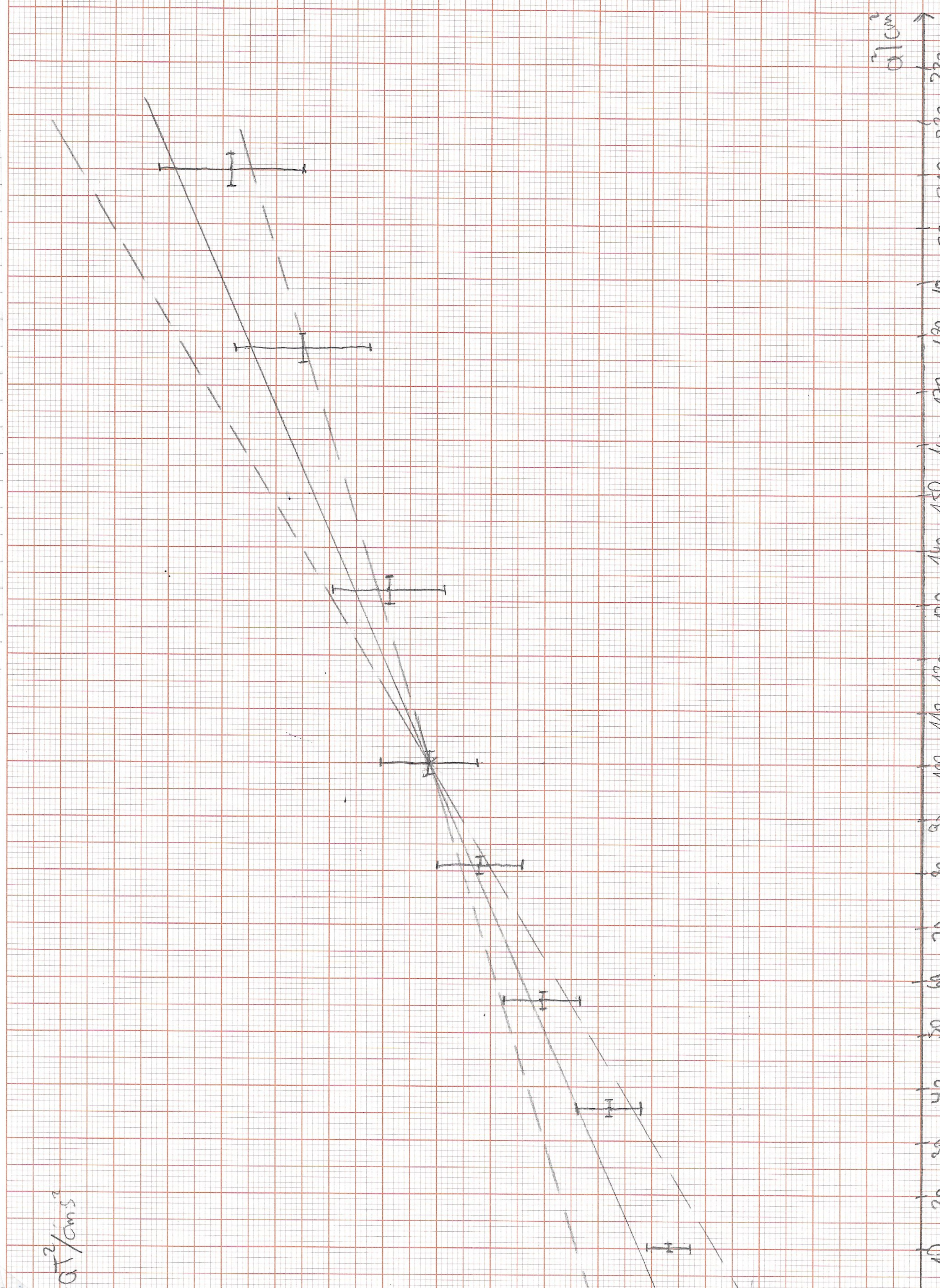
$$\Rightarrow \Theta_{Sd} = (0{,}01326 \pm 0{,}004007)\ kgm^2$$

104.6

$$\Delta\Theta_{Sd} = \sqrt{(mr\,\Delta r)^2} = mr\,\Delta r$$

$$\Rightarrow \Theta_{Sd} = (0{,}01251 \pm 0{,}0000168)\ kgm^2$$

Für die Erdbeschleunigung liegt der errechnete Wert mit $9{,}2\ \frac{m}{s^2}$ knapp neben dem Literaturwert von $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$. Wir liegen deutlich innerhalb der Fehlergrenze ($\pm 3\ \frac{m}{s^2}$; kein Wunder). Für das Trägheitsmoment erhalten wir mit der ersten Formel (fehlerbehaftetes g aus vorigem Aufgabenteil) einen sehr guten Wert, der fast mit dem theoretisch errechneten übereinstimmt. Mit der zweiten Formel liegt der Wert immerhin noch innerhalb der Fehlergrenzen. Auf die Ursachen für die Abweichungen gehen wir im Fazit nochmal ein.


a / cm²
aT² / cm s²
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

104.c

Dafür betrachten wir die Formel noch einmal genauer:

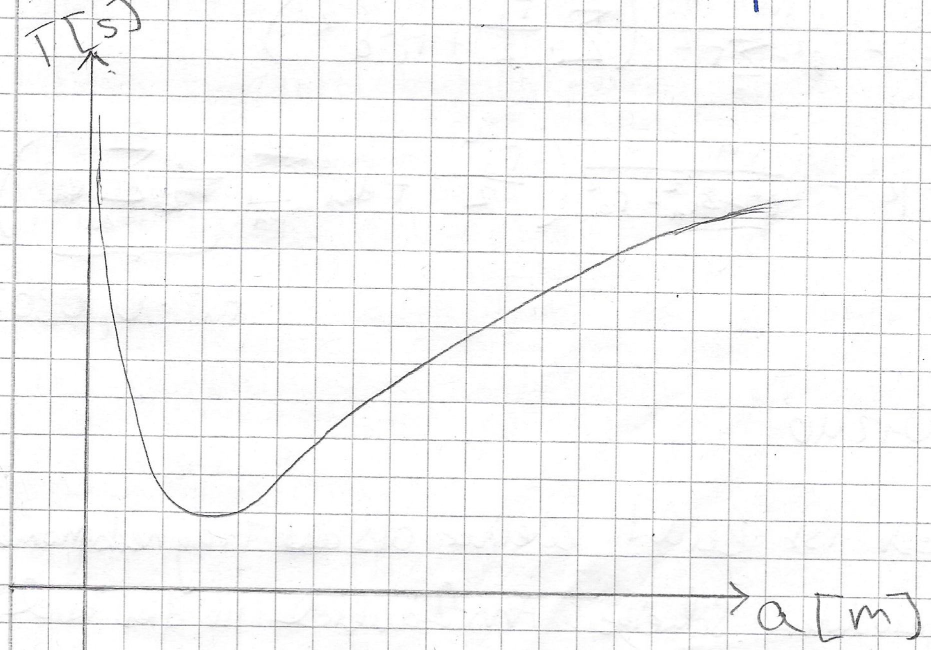
$$aT^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 \Theta_{sd}}{mg}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{g}}_{\beta} \cdot a^2$$

Wollen wir T in Abhängigkeit von a, so bemerken wir:

$$T^2 = \alpha \frac{1}{a} + \beta a$$

Nun sehen wir, dass βa dominiert für $a \gg 1$ bzw $a \to \infty$ und $\alpha \frac{1}{a}$ dominiert für $a \to 0$. Das heißt T^2 verhält sich im Unendlichen wie eine Gerade $y = mx$ und in der Nähe von 0 wie $y = \frac{m}{x}$. Durch das Wurzelzeichen erhalten wir letztendlich folgenden Verlauf (deutliches Merkmal ist hier ein Tiefpunkt: $T^2 = \alpha \frac{1}{a} + \beta a$

$$\Rightarrow \frac{dT^2}{a} = \beta - \frac{\alpha}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{\alpha}{\beta})$$



104.d

Aus Aufgabe 104.A gilt:

$$\Theta_{ges} = \Theta_S - \left(\sum_{i=0}^{8}\left[\Theta_{Loch,i} + \Theta_{St,i}\right]\right)$$

Das 0-te Loch in der Mitte hat einen Radius von $r_0 = (0{,}2 \pm 0{,}05)$ cm, während alle anderen in guter Näherung $r_i = (0{,}35 \pm 0{,}05)$ cm, $i \geq 1$ haben.

Da $\Theta_{ges} = \frac{1}{2}MR^2 - \rho\pi d\left(\sum_{i=0}^{8} \frac{r_i^4}{2} + r_i^2 a_i^2\right)$

gehen dort Potenzen von r_i größer gleich 2 ein und damit sind die Fehler von 0,05 vernachlässigbar klein. Außerdem gilt $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{R^2\pi d - \sum_{i=0}^{8} r_i^2 \pi d}$

und damit:

$$= \frac{m}{\pi d\left(R^2 - \sum_{i=0}^{8} r_i^2\right)}$$

$$\Theta_{ges} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{m}{R^2 - \sum_{i=0} r_i^2}\left(\sum_{i=0}^{8} \frac{r_i^4}{2} + r_i^2 a_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 - \frac{m}{R^2 - 8r_1^2 - r_0^2}\left(\frac{r_0^4}{2} + 8\frac{r_1^4}{2} + \underbrace{r_1^2 \sum_{i=1}^{8} a_i^2}_{r_1^2 \cdot 0{,}080288}\right)$$

$$= 0{,}01246$$

Dieser Wert ist leicht kleiner als das Trägheitsmoment der ungelochten Scheibe. Anschaulich ist dies auch völlig klar, da eine Scheibe der „was fehlt" natürlich weniger entgegen zu setzen hat, um eine Rotations-Bewegung zu verhindern.

Um noch einmal auf mögliche Fehlerquellen zu sprechen zu kommen, erläutern wir diese kurz. Durch das Quadrieren vor dem Abtragen pflanzen sich Fehler bereits immens fort. Es war sehr schwer eine passende Ausgleichsgrade zu finden und passende Fehlergeraden, die Fehler ober- und unterhalb gleichermaßen berücksichtigen.

Natürlich können sich auch Fehler in unseren Zeitmessungen eingeschlichen haben oder unsere Auslenkwinkel zu groß für die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ gewesen sein. Da wir auch die Radien der Löcher und deren Abstände von der Achse selbst messen mussten, können auch hier Ungenauigkeiten auftreten.

Durch einen Fehler in g pflanzt dieser sich natürlich über Rechenweg 1 auf Θ_{Sd} fort und verfälscht dieses Ergebnis ebenfalls. Dieser Wert stimmt ~~erstaun~~ dafür erstaunlicherweise gut mit dem theoretischen Wert überein, während g leicht davon abweicht.

Alle unsere Messwerte liegen aber im Fehlerbereich zu den Literaturwerten und stellen damit annehmbare Messungen dar.

i.O. [signature]