Hinweis

18.05.2015 # Versuch 106: Trägheitsmoment

Bei diesem Versuch soll das Trägheitsmoment verstanden werden. Es werden die theoretisch erwarteten Trägheitsmomente ausgerechnet und auf zwei verschiedene Arten das Trägheitsmoment für verschiedene Einstellungen von Masse, Radius und Fallhöhe experimentell bestimmt. Dabei müssen Winkelgeschwindigkeit und Fallzeit bestimmt werden.

Größen, Formeln, Begriffe

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $[M] = N \cdot m$

Spezialfall Rad/Scheibe

Trägheitsmoment: $I = \int_M r^2 \, dm \leftarrow \frac{1}{2} m r^2$ $[I] = kg m^2$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $[L] = kg \frac{m}{s} m = \frac{kg m^2}{s}$

Steinerscher Satz: Trägheitsmoment für Drehachsen, die um a von dem Massenschwerpunkt verschoben sind:

$$I' = I + ma^2$$

Abrollbedingung: $v(t) = \omega(t) \cdot r$

Energiesatzrechnung: $mgh = \frac{1}{2}(\Theta + mr^2) \cdot \omega^2(t_h)$

Drehmomentrechnung: $rmgt_h = (\Theta + mr^2)\,\omega(t_h)$

Aufgabe 106.A:

Hier gilt mit einem Kraftansatz:

$$F_G = F_m + F_R \Leftrightarrow mg = ma + \frac{I\alpha}{r}$$

wobei α: Winkelbeschleunigung. Dies folgt daraus, dass $F_R \cdot r = I \cdot \alpha$ (Drehmomentansatz).

$$\Rightarrow a = \frac{mg - \frac{I\alpha}{r}}{m} = g - \frac{I\alpha}{mr}$$

oder $mg = ma + \frac{I \cdot \frac{a}{r}}{r} = ma + \frac{Ia}{r^2}$

$$= a\left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{g}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

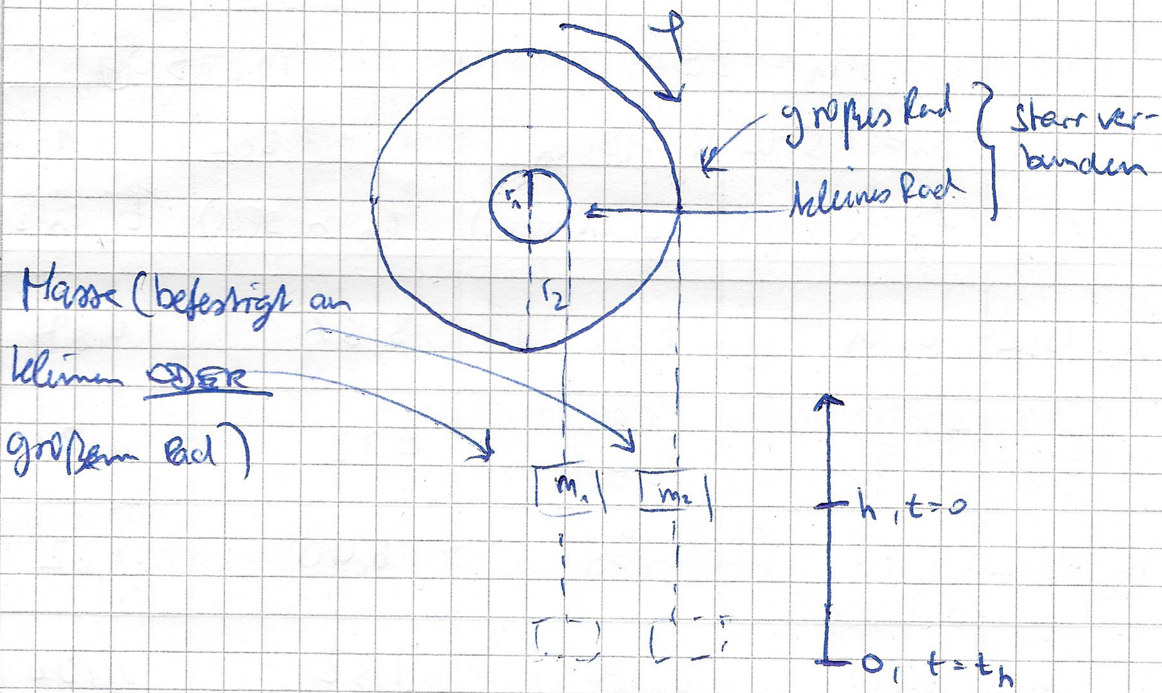
Aufgabe 106.B:

$$\theta = \frac{1}{2} m r^2$$

Dichte $\rho = 2{,}7 \frac{g}{cm^3}$; $V = r^2 \pi d$

	Großes Rad	Kleines Rad	Gesamt
Radius r/cm	10	2,5	
Dicke d/cm	2	1	
Volumen V/cm³	628,32	19,635	
Masse m/g	1696,5	53,0	
Trägheitsmoment θ / kgm²	0,0084825	0,0000165625	0,0085

Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung



In diesem Versuch messen wir für 2 Massen (25 g und 50 g) und 2 Schnurrollenradien (r = 2,5 cm und 10 cm) jeweils die Fallzeit t_h und die Winkelgeschwindigkeit ω aus 4 verschiedenen Höhen (h = 100 cm, 75 cm, 50 cm, 25 cm). Die Winkelgeschwindigkeit ermitteln wir dabei über die Umlaufzeit nach Auftreffen des Gewichts auf h = 0.
Dies tragen wir dann in ein Diagramm ω^2 gegen h und ein Diagramm ω gegen t_h auf. Aus der Steigung lässt sich jeweils das Trägheitsmoment ermitteln. Dabei beachten wir natürlich die Gaußsche Fehlerfortpflanzung und vergleichen unsere Werte im Fazit mit dem theoretisch erwarteten Wert.

Messung

	$m_1 = 25\,g$		$m_2 = 50\,g$	
	$r_1 = 2{,}5\,cm$	$r_2 = 10\,cm$	$r_1 = 2{,}5\,cm$	$r_2 = 10\,cm$
	t_h in s $(\pm 0{,}5)$	t_h in s $(\pm 0{,}5)$	t_h in s $(\pm 0{,}5)$	t_h in s $(\pm 0{,}5)$
$h_1 = 25\,cm$	5,11	1,31	3,58	0,87
$h_2 = 50\,cm$	7,45	1,9	5,32	1,2
$h_3 = 75\,cm$	9,11	2,34	6,40	1,62
$h_4 = 100\,cm$	10,72 10,36 10,56	2,74 2,72 2,76	7,32 7,56 7,47	1,92 1,86 1,78
Ø $h_4 = 100\,cm$	$10{,}55 \pm 0{,}29$	$2{,}74 \pm 0{,}29$	$7{,}45 \pm 0{,}29$	$1{,}89 \pm 0{,}29$
	T_i in s $(\pm 0{,}5)$	T_i in s $(\pm 0{,}5)$	T_i in s $(\pm 0{,}5)$	T_i in s $(\pm 0{,}5)$
$h_1 = 25\,cm$	$T_5 = 9{,}28$	$T_6 = 11{,}08$	$T_8 = 10{,}16$	$T_8 = 10{,}25$
$h_2 = 50\,cm$	$T_8 = 10{,}30$	$T_8 = 10{,}09$	$T_{11} = 9{,}87$	$T_{10} = 9{,}18$
$h_3 = 75\,cm$	$T_{10} = 10{,}44$	$T_{10} = 10{,}32$	$T_{13} = 10{,}00$	$T_{14} = 10{,}44$
$h_4 = 100\,cm$	$T_{11} = 10{,}43$ $T_{11} = 10{,}54$ $T_{11} = 10{,}06$	$T_{12} = 10{,}78$ $T_{12} = 10{,}71$ $T_{12} = 10{,}70$	$T_{16} = 10{,}46$ $T_{16} = 10{,}51$ $T_{16} = 10{,}54$	$T_{16} = 10{,}18$ $T_{16} = 10{,}23$ $T_{16} = 10{,}74$
Ø $h_4 = 100\,cm$	$T_{11,M} = 10{,}34 \pm 0{,}29$	$T_{12,M} = 10{,}73 \pm 0{,}29$	$T_{16,M} = 10{,}50 \pm 0{,}29$	$T_{16,M} = 10{,}38 \pm 0{,}29$

Auswertung

Zuerst mitteln wir die Messwerte für $h_4 = 100\,cm$ über die 3 Messungen mittels:

$$T_{i,M} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta T_{i,M} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\Delta T_2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\Delta T_3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\Delta T_1)^2 + (\Delta T_2)^2 + (\Delta T_3)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3(\Delta T)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\approx 0{,}289$$

Nun berechnen wir T_1 über die Formel:

$$T_1 = \frac{T_i}{i}$$

$$\Rightarrow \Delta T_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{i}\Delta T_i\right)^2} = \frac{\Delta T_i}{i}$$

und damit $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T_1^2}\Delta T_1\right)^2} = \frac{2\pi}{T_1^2}\Delta T_1$$

und außerdem noch

$$\omega^2 = (\omega)^2$$

$$\Rightarrow \Delta(\omega^2) = \sqrt{(2\omega\Delta\omega)^2} = 2\omega\Delta\omega$$

und tragen diese Werte in eine separate Tabelle für jeweils alle Kombinationen von m_1, m_2 und r_1, r_2 ein.

Die Fallzeit übertragen wir einfach nochmal aus der Tabelle oben, damit wir die Werte nachher einfacher ablesen können.

$m = 25g$, $r = 2,5cm$	T_1 in s	ω in $\frac{1}{s}$ *1	ω^2 in $\frac{1}{s^2}$ *2	t_h in s *1
$h_1 = 25cm$	1,86 ± 0,1	3,4 ± 0,2	11,5 ± 1,0	5,1 ± 0,5
$h_2 = 50cm$	1,29 ± 0,06	4,85 ± 0,25	23,5 ± 2,0	7,45 ± 0,5
$h_3 = 75cm$	1,04 ± 0,05	6,0 ± 0,3	36,5 ± 3,5	9,1 ± 0,5
$h_4 = 100cm$	0,94 ± 0,026	6,7 ± 0,2	44,5 ± 2,5	10,55 ± 0,3
$m_1 = 25g$, $r_2 = 10cm$				
h_1	1,85 ± 0,08	3,4 ± 0,15	11,5 ± 1,0	1,3 ± 0,5
h_2	1,26 ± 0,06	5,0 ± 0,25	25,0 ± 2,5	1,9 ± 0,5
h_3	1,03 ± 0,05	6,1 ± 0,3	37,0 ± 3,5	2,35 ± 0,5
h_4	0,89 ± 0,024	7,05 ± 0,2	50 ± 2,5	2,75 ± 0,3
$m_2 = 50g$, $r_1 = 2,5cm$				
h_1	1,27 ± 0,06	4,95 ± 0,25	24,5 ± 2,5	3,6 ± 0,5
h_2	0,9 ± 0,05	7,0 ± 0,4	48,5 ± 5,5	5,3 ± 0,5
h_3	0,77 ± 0,04	8,15 ± 0,4	66,5 ± 7,0	6,4 ± 0,5
h_4	0,66 ± 0,018	9,5 ± 0,25	90,5 ± 5,0	7,45 ± 0,3
$m_2 = 50g$, $r_2 = 10cm$				
h_1	1,28 ± 0,06	4,9 ± 0,25	24,0 ± 2,5	0,85 ± 0,5
h_2	0,92 ± 0,05	6,85 ± 0,35	46,5 ± 5,0	1,2 ± 0,5
h_3	0,75 ± 0,04	8,4 ± 0,45	70,0 ± 7,5	1,6 ± 0,5
h_4	0,65 ± 0,018	9,65 ± 0,25	93,5 ± 5,0	1,9 ± 0,3

*1 gerundet auf 0,05 } da dies die kleinsten Werte unserer
*2 gerundet auf 0,5 } gewählten Skala, die man noch
vernünftig eintragen kann.

Aufgabe 106.b

NICHT UNSERE IDEE ALLE PLOTS IN EINEN GRAPHEN ZU TUN. SIEHE AUFGABENSTELLUNG!
FEHLERGERADEN WIEDER AUSRADIERT NACH MESSEN

m_1, r_1: Steigung ermitteln:

$$m = \frac{40-10}{84{,}375-21{,}875} = 0{,}48 \quad , \Delta m = \frac{|m-m_1| + |m-m_2|}{2}$$

$$m_1 = \frac{52{,}5-2{,}5}{96{,}875-21{,}875} = 0{,}67$$

$$m_2 = \frac{40-17{,}5}{93{,}75-25} = 0{,}327$$

$\Delta m = 0{,}1715$

m_1, r_2:

$$m = \frac{35-12{,}5}{71{,}875-31{,}25} = 0{,}55$$

$$m_1 = \frac{50-30}{87{,}5-62{,}5} = 0{,}8$$

$$m_2 = \frac{30-20}{62{,}5-31{,}25} = 0{,}32$$

$\Delta m = 0{,}24$

m_2, r_1:

$$m = \frac{87{,}5-30}{96{,}875-31{,}25} = 0{,}87$$

$$m_1 = \frac{65-42{,}5}{68{,}75-50} = 1{,}2$$

$$m_2 = \frac{72{,}5-40}{84{,}375-37{,}5} = 0{,}69$$

$\Delta m = 0{,}26$

m_2, r_2:

$$m = \frac{87{,}5-60}{93{,}75-62{,}5} = 0{,}88$$

$$m_1 = \frac{85-35}{81{,}25-43{,}75} = 1{,}33$$

$$m_2 = \frac{75-27{,}5}{84{,}375-15{,}625} = 0{,}69$$

$\Delta m = 0{,}32$

In unserem Diagramm gilt nun:

$$mgh = \frac{1}{2}(\Theta + mr^2)\omega^2(t_h)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2mgh}{\Theta + mr^2} = \omega^2(t_h)$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{2mg}{\Theta + mr^2} \Leftrightarrow (\Theta + mr^2)\, m_s = 2mg$$

$$\Leftrightarrow \Theta = \frac{2mg - mr^2 m_s}{m_s} = \frac{2mg}{m_s} - mr^2$$

$$\Rightarrow \Delta\Theta = \sqrt{\left(-\frac{2mg}{m_s^2}\right)^2 (\Delta m_s)^2} = \frac{2mg}{m_s^2}\Delta m_s$$

$\underline{m_1, r_1}$: $m_s = 0{,}48 \pm 0{,}1715 \left[\frac{1}{cm\, s^2}\right]$

$\Rightarrow \Theta = (102031{,}25 \pm 36510{,}74)\ cm^2 g$

wobei $g = 981 \frac{cm}{s^2}$, und die anderen Werte aus der Tabelle übernommen sind.

Umrechnen liefert: $\Theta = (0{,}0102 \pm 0{,}00365)\ kgm^2$

Wobei hier wegen $cm \hat{=} 10^{-2} m$, $Kg = 10^3 g$ der Faktor 10^{-7} verwendet wurde. Analog folgt:

$\underline{m_1 r_2}$: $m_s = 0{,}55 \pm 0{,}24 \left[\frac{1}{cm\, s^2}\right]$

$\Theta = (88931{,}82 \pm 38915{,}70)\ gcm^2$

$\Theta = (0{,}008893 \pm 0{,}003892)\ kgm^2$

$\underline{m_2 r_1}$: $m_s = 0{,}87 \pm 0{,}26$

$\Theta = (112446{,}12 \pm 33697{,}98)\ gcm^2$

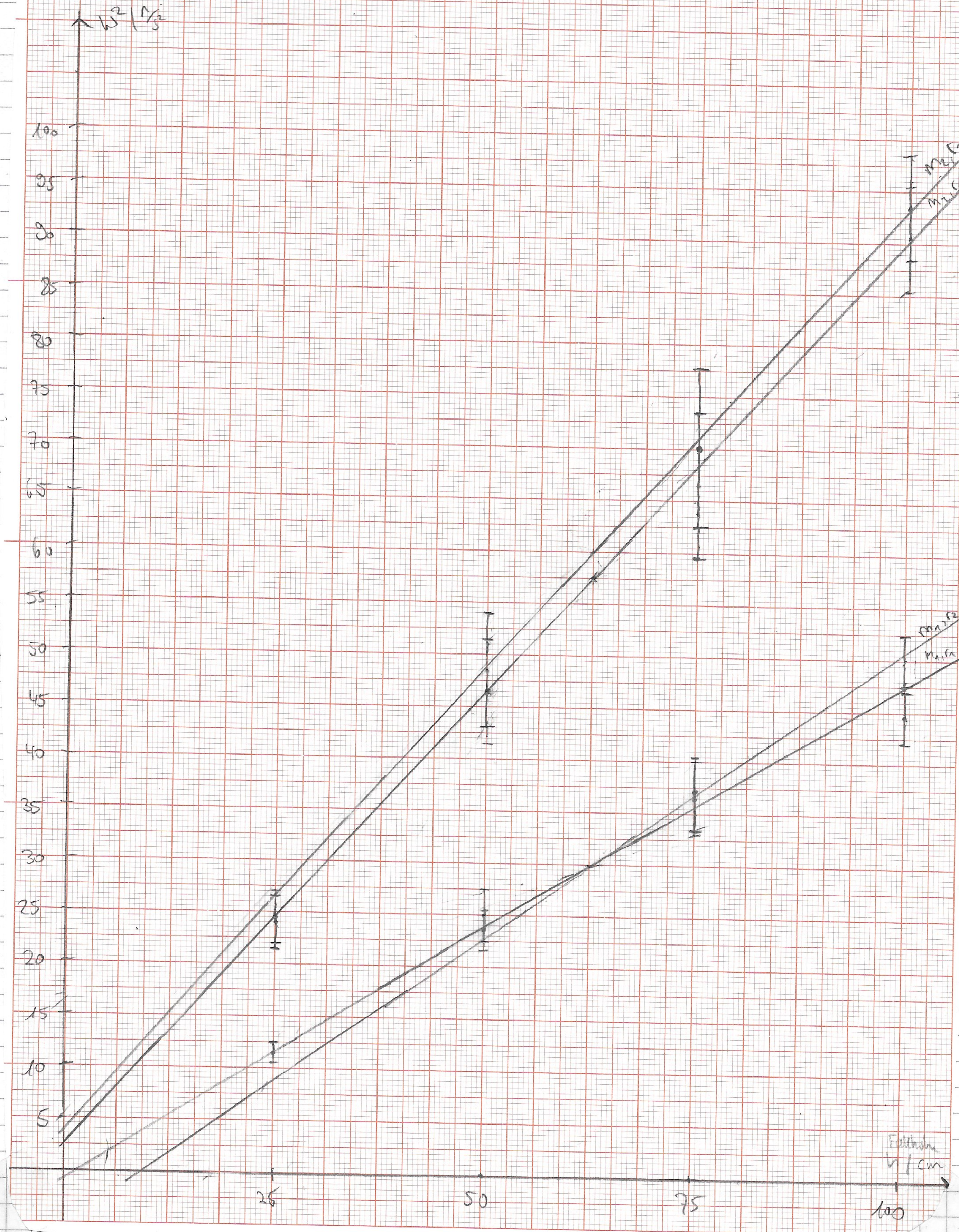
$\Theta = (0{,}011245 \pm 0{,}00337)\ kgm^2$

$\underline{m_2, r_2}$: $m_s = 0{,}88 \pm 0{,}32$

$\Theta = (106477{,}27 \pm 40537{,}2)\ gcm^2$

$\Theta = (0{,}01065 \pm 0{,}00405)\ kgm^2$

Energie-Methode



Aufgabe 106.c

m_{1,r_1}: $m = \frac{6-4}{9-6} = 0,67$

$m_1 = \frac{7-3,5}{10-6} = 0,875$

$m_2 = \frac{6,75-4}{11-5} = 0,46$

$\Delta m = 0,208$

m_{1,r_2}: $m = \frac{6-4,25}{2,25-1,5} = 2,33$

$m_1 = \frac{7,75-3}{2,75-1,25} = 3,167$

$m_2 = \frac{6,75-4,5}{2,75-1,5} = 1,8$

$\Delta m = 0,6835$

m_{2,r_1}: $m = \frac{8,75-4,75}{6,75-3,75} = 1,33$

$m_1 = \frac{8,75-4}{6,5-3,75} = 1,73$

$m_2 = \frac{9-4}{7,25-2,5} = 1,05$

$\Delta m = 0,34$

m_{2,r_2}: $m = \frac{9,5-6}{1,75-0,75} = 3,5$

$m_1 = \frac{9-6,25}{1,5-1} = 5,5$

$m_2 = \frac{9-5,75}{1,75-0,5} = 2,6$

$\Delta m = 1,45$

Hier gilt nun:

$$rmg\, t_h = (\Theta + m r^2)\, \omega(t_h)$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega(t_h) = \frac{rmg}{\Theta + m r^2}\, t_h$$

$$\Rightarrow \quad m_s = \frac{rmg}{\Theta + m r^2} \Leftrightarrow \Theta + m r^2 = \frac{rmg}{m_s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta = \frac{rmg}{m_s} - m r^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Theta = \frac{rmg}{m_s^2}\, \Delta m_s$$

$\underline{m_1, r_1}$: $m_s = 0{,}67 \pm 0{,}208 \left[\frac{1}{s^2}\right]$

$$\Theta = (91354{,}94 \pm 28409{,}44)\, g\,cm^2$$
$$\Theta = (0{,}009135 \pm 0{,}002841)\, kg\,m^2$$

$\underline{m_1, r_2}$: $m_s = 2{,}31 \pm 0{,}6835 \left[\frac{1}{s^2}\right]$

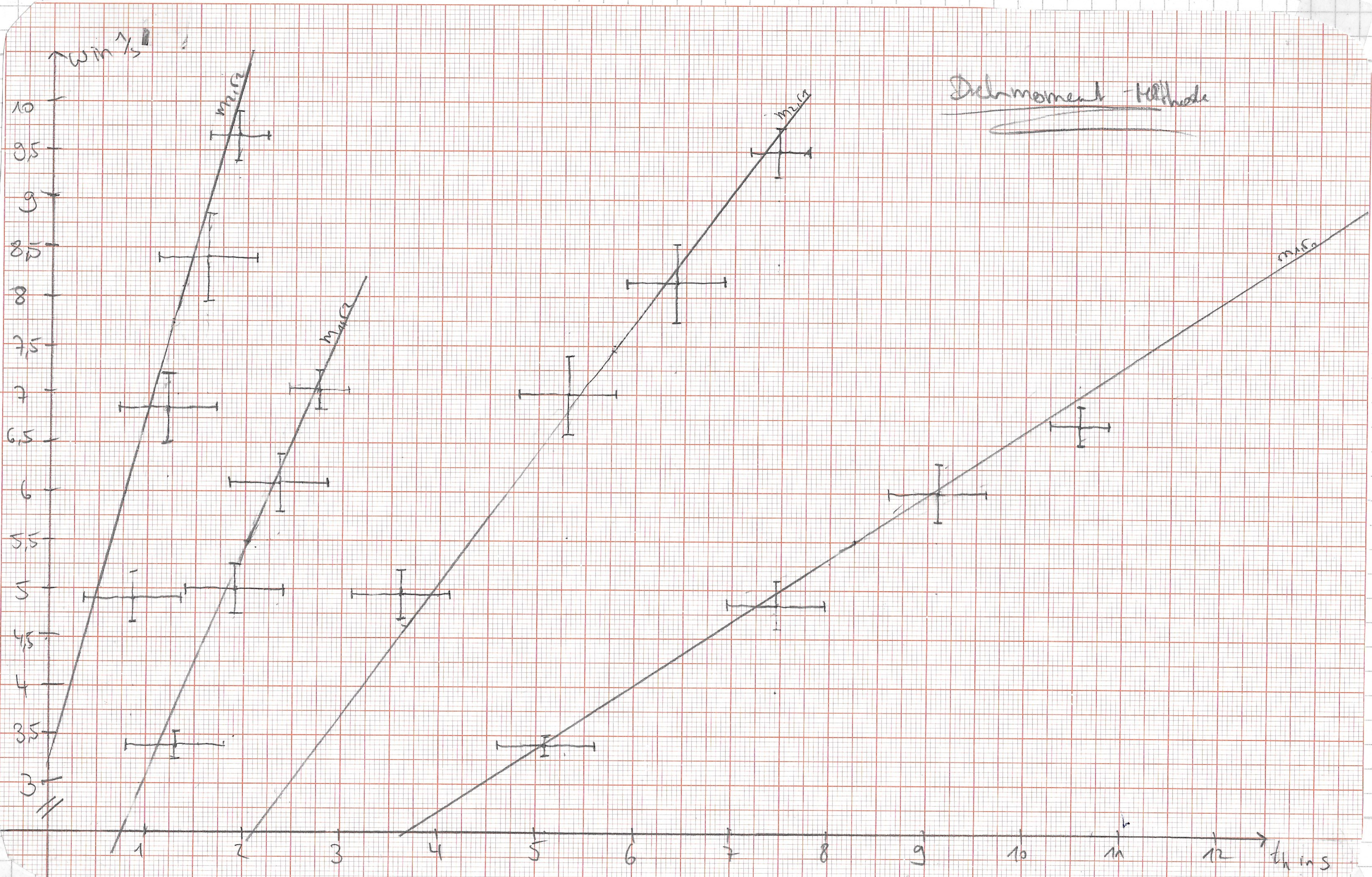
$$\Theta = (102757{,}51 \pm 30877)\, g\,cm^2$$
$$\Theta = (0{,}010276 \pm 0{,}003088)\, kg\,m^2$$

$\underline{m_2, r_1}$: $m_s = 1{,}33 \pm 0{,}34 \left[\frac{1}{s^2}\right]$

$$\Theta = (91886{,}75 \pm 23569{,}73)\, g\,cm^2$$
$$\Theta = (0{,}009189 \pm 0{,}002357)\, kg\,m^2$$

$\underline{m_2, r_2}$: $m_s = 3{,}5 \pm 1{,}45$

$$\Theta = (135142{,}86 \pm 58059{,}2)\, g\,cm^2$$
$$\Theta = (0{,}013514 \pm 0{,}005806)\, kg\,m^2$$


Drehmoment-Methode
ω in 1/s
t_h in s
m₂r₂
m₁r₂
m₂r₁
m₁r₁
10
9,5
9
8,5
8
7,5
7
6,5
6
5,5
5
4,5
4
3,5
3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

~~Radius r_1 | Radius r_2~~

~~Ma~~

Aufgabe 106. d

	Radius r_1	Radius r_2
Masse m_1	$\Theta_1 = 0{,}0102 \pm 0{,}00365$ [kgm²] $\Theta_2 = 0{,}00914 \pm 0{,}00284$ [kgm²]	$\Theta_1 = 0{,}00889 \pm 0{,}00389$ [kgm²] $\Theta_2 = 0{,}0103 \pm 0{,}0031$ [kgm²]
Masse m_2	$\Theta_1 = 0{,}0112 \pm 0{,}0034$ [kgm²] $\Theta_2 = 0{,}0092 \pm 0{,}0024$ [kgm²]	$\Theta_1 = 0{,}0107 \pm 0{,}0041$ [kgm²] $\Theta_2 = 0{,}0135 \pm 0{,}0024$ [kgm²]

Wobei Θ_1 der Trägheitsmoment nach Variante 1 und Θ_2 der Trägheitsmoment nach Variante 2 ist.

Zu allererst bemerken wir, dass unsere Werte sehr gut (innerhalb der Fehlergrenzen) mit dem theoretischen Wert

$$\Theta_{th} = 0{,}0085\,kgm^2$$

aus Aufgabe 106.b übereinstimmt.

(erste Methode)

Den besten Wert erhalten wir für m_1 und r_2, wobei hier keine Tendenz zu erkennen ist, sondern bloß von Messfehlern und Folge- bzw. Ablesefehlern auszugehen ist. Da wir den Fehler mit $\pm 0{,}5s$ durch Reaktionszeit und falsches Stoppen allerdings recht großzügig gewählt haben, liegen die Werte im Fehlerbereich um den theoretisch erwarteten Wert. Einen ebenfalls sehr guten Wert erhalten wir für m_2 und r_1 mittels der zweiten Variante.

Die abgetragenen Werte für ω^2, ω und t_h stimmen soweit noch mit den Fehlerbalken nach Gauß. Nun können beim Ablesen der Steigung und beim Konstruieren der Fehlergeraden allerdings recht schnell Fehler passieren, was unser Ergebnis wohl möglich so stark verfälscht. Was wir gar nicht beachtet haben ist, dass der theoretisch errechnete Wert auch nicht genau stimmen wird, da wir diesen wiederum durch Abmessungen wie Dicke und Radius, sowie Dichte bestimmt haben, welche alle als fehlerfrei angegeben waren.

Weitere mögliche Fehlerquellen sind, dass das Gewicht oft nicht sofort losgefallen ist, und eine genaue Zeitmessung dadurch schwierig war.

Außerdem war unser Seil zu kurz für das kleine Rad, sodass das Gewicht das letzte Stück frei gefallen ist, ohne dass dort weitere potentielle Energie in kinetische Energie des Rades umgewandelt wurde.

Alles in allem ein gelungener Versuch !

Schreib mir bitte wo ich das Heft abholen kann:

0171 - 8302312

i.O. [signature]