Hinweis

Die vorliegende Zusammenfassung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Zusammenfassung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe: https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Zusammenfassung!

Versuch 114 Zusammenfassung

Statistische Schwankungen

Anhand von radioaktivem Zerfall eines 137-Cs Präparats (γ-Strahler) werden statistische Gesetzmäßigkeiten aufgezeigt. Dabei wird ein Geiger-Müller-Zählrohr verwendet.

Binomialverteilung: $P_B(k; p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad X \sim Bin(n, p, k)$$

$$E[X] = np \; , \; Var[X] = np(1-p)$$

Poissonverteilung: $n \gg 1$, $p \ll 1$

$$P_P(k; \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad X \sim Poisson(\mu)$$

$$E[X] = \mu \; , \; Var[X] = \mu$$

Gaußverteilung: $n \gg 1$, p fast beliebig, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \gg 1$

$$P_G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$E[X] = np \; , \; Var[X] = np(1-p)$$

Spezialfall: $(p \ll 1)$ $\quad P_L(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\mu}}$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = \bar{k} = \sum_{k=0}^{k_{max}} k \frac{n_k}{N} \; , \; k_{max} = \max_{i=1,\dots,N} k_i$$

$$\Delta\hat{\mu} = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(k_i - \bar{k})^2} = \sqrt{\frac{\sigma_k^2}{N}} \quad \text{für große } N$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{N}} \quad \text{für Poisson-verteilte } k_i$$

$$\langle n_k \rangle = N \cdot P(k)$$

$$\Delta n_k = \sqrt{N \cdot P(k)(1 - P(k))} \overset{\text{für}}{\underset{P(k) \ll 1}{=}} \sqrt{N \cdot P(k)} = \sqrt{\langle n_k \rangle}$$

- Quelle („Strahlkollimator") mit Absorberstift verschließen
- im Mittel sollen pro Intervall 2-3 Impulse gezählt werden
- Histogramm mit n_k: Anz. Striche wie oft k aufgetreten ist
- Messen bis $N = \sum_{k=0}^{\infty} n_k = 300$
- $\hat{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{n_k}{N}$, $\Delta\hat{\mu} = \sqrt{\frac{k}{N}}$, $\langle n_k \rangle = N \cdot P(k)$

$$\Delta n_k = \sqrt{\langle n_k \rangle \left(1 - \frac{\langle n_k \rangle}{N}\right)}$$

- Fehlerbalken $\langle n_k \rangle \pm \Delta n_k \rightarrow$ 2/3 n_k innerhalb Fehlerbalken?

- 300 Impulse ohne Absorberstift (verschieben Zählrohr; Zählzeit variieren)
- Intervalle der Größe $\Delta k = 10$: $S_k = n_k + n_{k+1} + \ldots n_{k+9} = \sum_{i=0}^{9} n_{k+i}$
- Messen bis $N = \sum S_k = \sum n_k = 300$
- $\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=0}^{N} k n_k}{N} \approx \frac{\sum_{k=0,10}^{\infty} (k+5) S_k}{N}$

- $\langle S_k \rangle = \langle n_k \rangle + \langle n_{k+1} \rangle + \ldots + \langle n_{k+9} \rangle \approx 10 \langle n_{k+5} \rangle = 10 \cdot N \cdot P(k+5)$
- $\Delta S_k = \sqrt{\langle S_k \rangle \left(1 - \frac{\langle S_k \rangle}{N}\right)}$, ? Streuung $\sqrt{\hat{\mu}}$?
- $\langle S_k \rangle \pm \Delta S_k$ in Häufigkeitsdiagramm $\rightarrow$ 2/3 der Säulen Messwert innerhalb Fehlerbalken?

$\hat{=}$ gemessene Verteilung verträglich mit Annahme der Gauß-Verteilung (μ)