

Hinweis

Das vorliegende Protokoll wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde dieses Protokoll von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:

<https://www.physics-and-stuff.com/>

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit des vorliegenden Protokolls! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Dieses Werk von [Marvin Zanke](#) ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

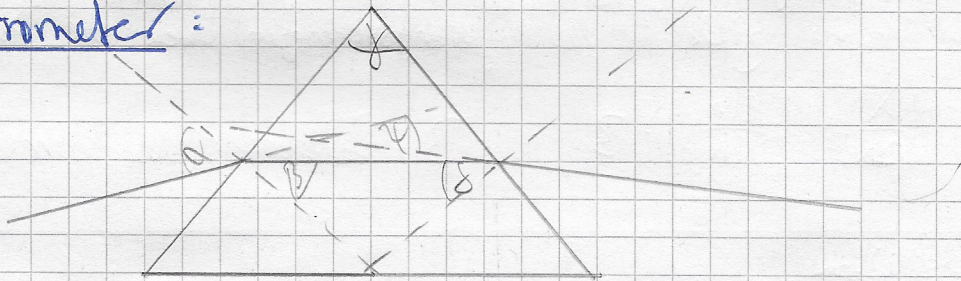
10.03.2016 Versuch 366: Prismen-Spektalapparat

In diesem Versuch experimentiert man mit einem Prisma (Prismen-Spektalapparat).

Man bestimmt Brechungsindex und Auflösungsvermögen eines Glasprismas und ermittelt bei einem unbekanntem Element anhand des Spektrums, um welches Element es sich handelt.

Größen, Formeln, Begriffe

Spektrometer:



Offensichtlich gilt: $180^\circ = \gamma + (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \delta)$
 $\Leftrightarrow \gamma = \beta + \delta$

Minimum der Ablenkung ist gegeben für: (\neq Skizze)

$\alpha = \epsilon$ d.h. symmetrischer Durchlauf des Strahls

$$\beta = \delta$$

$$\Rightarrow \gamma = 2\beta, \quad \varphi = 180 - (180 - (\alpha - \beta) - (\epsilon - \delta))$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\gamma}{2}}$$

$$= (\alpha - \beta) + (\epsilon - \delta) = 2\alpha - 2\beta = 2\alpha - \gamma \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\gamma + \varphi}{2}}$$

Brechungsgesetz: $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$, $n_2 \sin \delta = n_1 \sin \epsilon$

$$n_1 = 1, n_2 = n \Rightarrow n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \epsilon}{\sin \delta} \\ = \frac{\sin \left(\frac{\varphi + \gamma}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\gamma}{2} \right)}$$

Brechungsindex $n(\lambda)$ - Dispersion:

Für verschiedene Wellenlängen erhält man beim Prisma verschiedene Brechungsindizes. Der Differentialquotient der Dispersion lautet $\frac{dn}{d\lambda}$.

Spektrum:

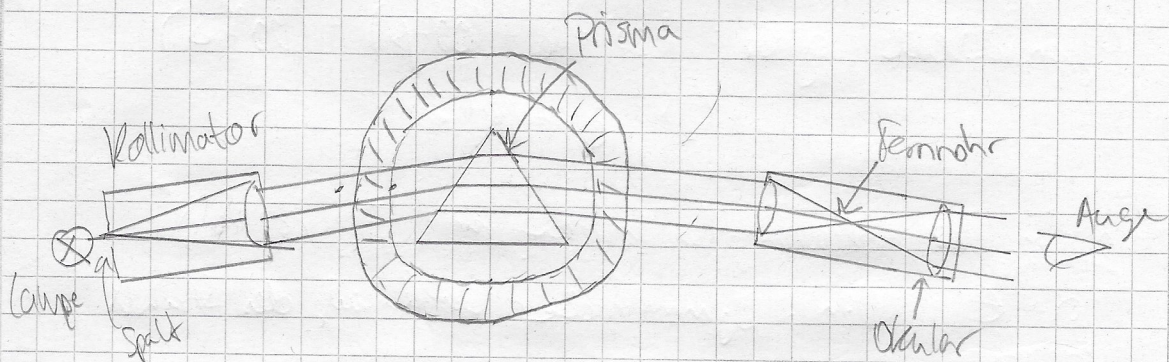
Die Gaslampe sendet ein gewisses Absorptions- / Emissions-Spektrum aus, welches auf Grund der Dispersion spektral zerlegt wird.

Auflösungsvermögen:

Für ein Prisma gilt für das Auflösungsvermögen über die Dispersion:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \cdot B \quad , \quad B: \text{Basisbreite des Prismes}$$

Versuchsaufbau



Versuchsdurchführung

Nachdem man den Prismen-Spektalapparat nach Anleitung justiert hat, misst man den Winkel φ der brechenden Kante, indem man die Winkel misst, unter denen die Reflexionsbilder links und rechts erscheinen.

Als nächstes kalibriert man den Aufbau mittels einer Hg / Cd-Spektrallampe, indem man für die grüne Hg-Lampe das Minimum der Ablenkung einstellt und dann die

Ablenkwinkel aller sichtbaren Linien des Spektrums bestimmt.
Mittels einer ^{de} erstellten Kalibrationskurve (λ gegen δ) kann
man so im vorletzten Versuchsfall ein unbekanntes Element
anhand seines Spektrums ermitteln.

Im letzten Teil bestimmt man das Auflösungsvermögen A und
die auflösbare Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$, indem man für
verschiedene Linien den Brechungsindex bestimmt und mittels
der Cauchyformel einen Faktor ausrechnet.

Messung

a) Nach der korrekten Justierung konnte man mit der
Messung anfangen.

b) links, $\alpha_1 = 230^\circ 52' \pm 30'$

rechts, $\alpha_2 = 110^\circ 11' \pm 30'$

wobei bei α_1 bereits 90° addiert wurden
und bei α_2 subtrahiert, da die Apparatur dies
erfordert (Ableseverfahren).

c) Die grüne Linie "muss" in das Minimum der Ablenkung
weil diese mit $\lambda \approx 500\text{nm}$ mittig liegt. Die anderen
Linien sind dann symmetrisch darum ebenfalls
im Minimum der Ablenkung.
Auch hier sind die 90° Offset der Messapparatur direkt
mit einberechnet.

Wellenlänge λ in nm	Farbe	Winkel Fernrohr/Kollimator φ
643,85	rot	$217^{\circ} 30' \pm 30'$
579,06	gelb	$218^{\circ} 24' \pm 30'$
576,96	gelb	$218^{\circ} 30' \pm 30'$
546,07	grün	$218^{\circ} 47' \pm 30'$
508,58	türkis	$219^{\circ} 16' \pm 30'$
479,99	hellblau	$219^{\circ} 45' \pm 30'$
467,82	dunkelblau	$220^{\circ} 00' \pm 30'$
435,83	lila	$220^{\circ} 44' \pm 30'$
407,78	lila (schwarz)	$221^{\circ} 38' \pm 30'$
404,85	lila (schwarz)	$221^{\circ} 47' \pm 30'$

LAMPE 4

rot(hell)	$217^{\circ} 55' \pm 30'$
rot(hell)	$218^{\circ} 00' \pm 30'$
orange	$218^{\circ} 15' \pm 30'$
hellgrün	$218^{\circ} 26' \pm 30'$
grün	$218^{\circ} 33' \pm 30'$
dunkelgrün	$219^{\circ} 07' \pm 30'$
lila	$220^{\circ} 50' \pm 30'$
lila	$220^{\circ} 59' \pm 30'$

Mehr Linien leider nicht deutlich zu erkennen.

Nur sehr schwach.

Für B haben wir gemessen: $B = (2,6 \pm 0,2)$ cm
indem wir ein Blatt Papier vor das Prisma

gehalten haben und gemessen haben, ab welcher Breite wir Lichtfall auf dem Papier sehen.

n. Caple

Auswertung

b) Hier gilt wie angegeben, $\delta = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$
 $\Rightarrow \Delta\delta = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta\alpha_1)^2 + (\Delta\alpha_2)^2}$

Aus unserer Messung entnehmen wir die Werte

$$\alpha_1 = (230^\circ 52' \pm 30')$$

$$\alpha_2 = (110^\circ 11' \pm 30')$$

und erhalten dann damit

$$\delta = (60,342 \pm 0,354)^\circ$$

Dies hätte man auch erwartet, da man per Augenmaß gut einsehen konnte, dass es sich bei dem Prisma um ein gleichseitiges (bzw. gleichseitige Grundfläche) handelte. Dort gilt $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ für die Innenwinkel.

c) Das Minimum der Ablenkung wurde ^{so} eingestellt, da der Mensch bei diesem Wellenlängenbereich ein Maximum der Intensität wahrnimmt. Die Sonne hat bei diesen Wellenlängen eine maximale Intensität und der Mensch reagiert dadurch auch am empfindlichsten auf Grün.

Für die Tabelle rechnet man zuerst 180° vom Winkel ab, da der Winkel: "eigentlicher Strahlverlauf - abgelenkter Strahl" gebraucht wird, und wir kollimator - abgelenkter Strahl gemessen haben.

Außerdem rechnen wir ins Bogenmaß um, also $\frac{2\pi}{360^\circ}$ als Faktor. (In der Tabelle wurde zuerst ins Bogenmaß umgerechnet und dann π abgezogen).

Diesmal auch erst bei dem Winkel δ auf 4 Nachkommastellen gerundet, da kleine Winkeländerungen großes Ausmaß haben.

Wellenlänge in nm	Winkel ϕ in $^\circ, ', ''$	$\Delta\phi$ in $^\circ, ', ''$	Winkel ϕ in rad	$\Delta\phi$ in rad	Winkel δ in rad	$\Delta\delta$ in rad
643.85	217° 30'	30'	3.796093	0.008727	0.6545	0.008727
579.06	218° 24'	30'	3.811793	0.008727	0.6702	0.008727
576.96	218° 30'	30'	3.813593	0.008727	0.672	0.008727
546.07	218° 47'	30'	3.818493	0.008727	0.6769	0.008727
508.58	219° 16'	30'	3.826893	0.008727	0.6853	0.008727
479.99	219° 45'	30'	3.835393	0.008727	0.6938	0.008727
467.82	220° 00'	30'	3.839693	0.008727	0.6981	0.008727
435.83	220° 44'	30'	3.852493	0.008727	0.7109	0.008727
407.78	221° 38'	30'	3.868293	0.008727	0.7267	0.008727
404.65	221° 47'	30'	3.870893	0.008727	0.7293	0.008727

Trägt man mit Grapher nur den Winkel δ in rad gegen die Wellenlänge λ in nm auf, so erhält man den Plot auf der nächsten Seite. Gefittet wurde mit einer e-Funktion: $f(x) = a \exp(-bx)$

Und es ergab folgende Parameter:

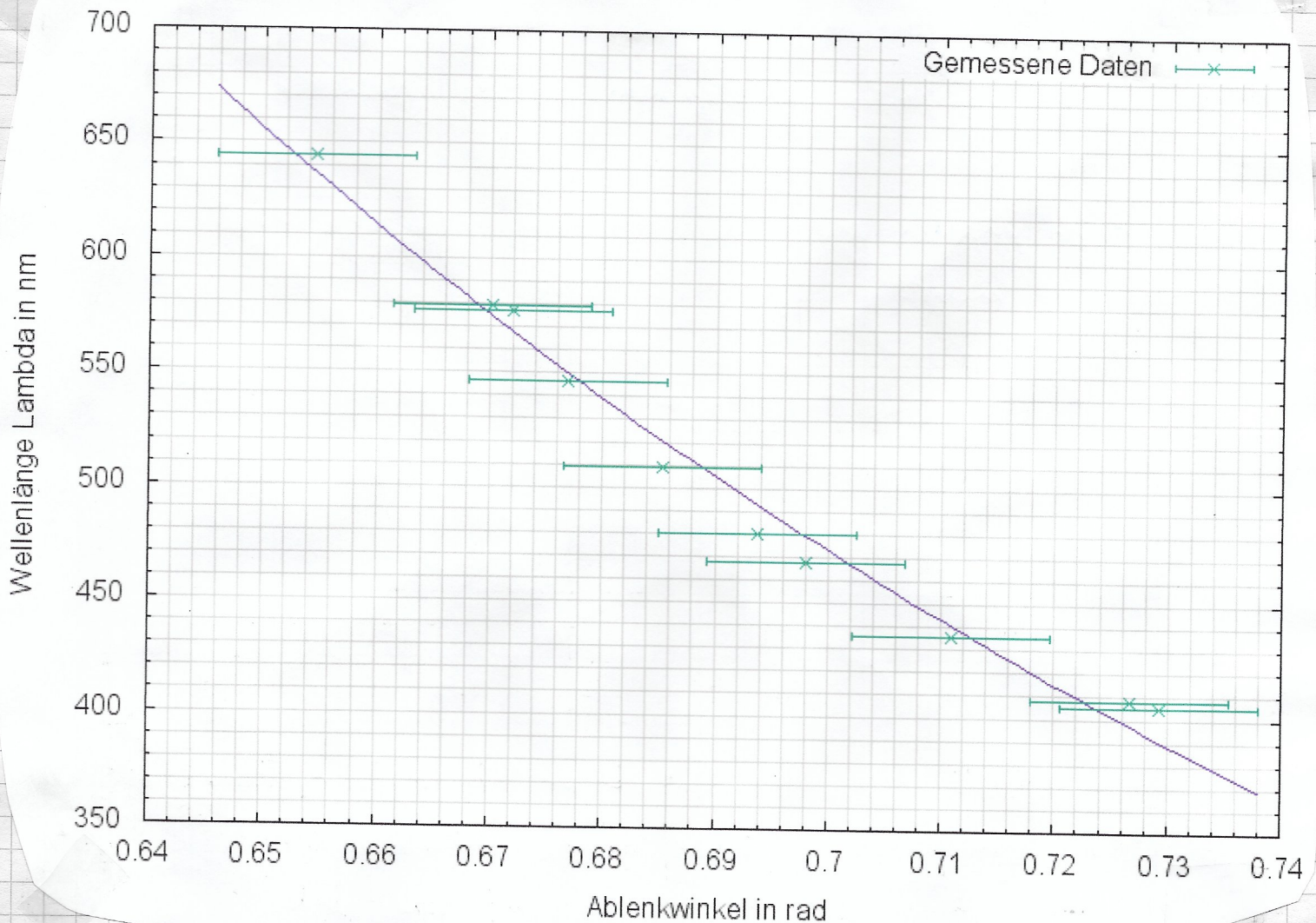
$$a = 45475,7 \pm 9356$$

$$b = 6,52251 \pm 0,3029$$

Damit gilt in guter Näherung:

$$\lambda = 45475,7 e^{-6,52251 \cdot \delta}$$

Wellenlänge Lambda gegen Ablenkswinkel



d) Wir wollen hierfür annehmen, dass unsere Kurve fehlerfrei ist, also $\Delta a = 0$, $\Delta b = 0$, aber weiterhin ein Fehler existiert in ΔS . Man kann nun die Formel $\lambda(S)$ verwenden, um die zum Winkel zugehörigen Wellenlängen zu ermitteln. Man überprüft anhand obiger Skizze die Übereinstimmung.

$$\Delta \lambda = \left| 45475,7 \cdot e^{-6,522518} \cdot (-6,52251) \Delta S \right|$$

gibt mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung, wobei man hier λ wiederfindet, also insgesamt:

$$\Delta \lambda = |6,52251 \cdot \lambda \cdot \Delta S|$$

Man erhält dann folgende Tabelle mit leider sehr großen Messfehlern, was es sehr erschwert, festzustellen, um welche Kombination von Elementen es sich gehandelt haben könnte. Auch hier wurde zu Beginn der Rechnungen kaum gemundet und in der Nähe zum Endergebnis immer etwas mehr.

Winkel ϕ in °, ', ''	$\Delta\phi$ in °, ', ''	Winkel ϕ in rad	$\Delta\phi$ in rad	Winkel δ in rad	$\Delta\delta$ in rad	Wellenlänge in nm	$\Delta\lambda$ in nm
217° 55'	30'	3.803363	0.008727	0.6618	0.00873	607.00	34.55
218° 00'	30'	3.804818	0.008727	0.6632	0.00873	601.27	34.22
218° 15'	30'	3.809181	0.008727	0.6676	0.00873	584.40	33.26
218° 26'	30'	3.812381	0.008727	0.6708	0.00873	572.33	32.58
218° 33'	30'	3.814417	0.008727	0.6728	0.00873	564.78	32.15
219° 07'	30'	3.824307	0.008727	0.6827	0.00873	529.49	30.14
220° 50'	30'	3.854269	0.008727	0.7127	0.00873	435.50	24.79
220° 59'	30'	3.856887	0.008727	0.7153	0.00873	428.13	24.37

Da wir allerdings sehr viele Linien (die meisten davon auch gut sichtbar) gesehen haben, und nur sehr wenig grüne sichtbare Linien, außerdem auch quasi keine türkise Linie, liegt die Vermutung nahe, dass es sich um Rb-Na gehandelt hat.

nur Rb
laut Anleitung

Dies deckt sich auch sehr gut mit den gemessenen Wellenlängen, so könnte man beispielsweise zurechnen:

$$\begin{aligned}
 (607,00 \pm 34,55) \text{ nm} &\hat{=} 629,92 \text{ nm, rot, lnt 5} \\
 (601,27 \pm 34,27) \text{ nm} &\hat{=} 620,63 \text{ nm, rot, lnt 5} \\
 (584,40 \pm 33,26) \text{ nm} &\hat{=} 599,59 \text{ nm, orange, lnt 5} \\
 (572,33 \pm 32,58) \text{ nm} &\hat{=} 572,45 \text{ nm, hellgrün, lnt 4} \\
 (564,78 \pm 32,15) \text{ nm} &\hat{=} 564,81 \text{ nm, grün, lnt 4} \\
 (529,49 \pm 30,14) \text{ nm} &\hat{=} 526,00 \text{ nm, dunkelgrün, lnt 3} \\
 (435,50 \pm 24,79) \text{ nm} &\hat{=} 421,56 \text{ nm, lila, lnt 5} \\
 (428,13 \pm 24,37) \text{ nm} &\hat{=} 420,19 \text{ nm, lila, lnt 5}
 \end{aligned}$$

Bei Calcium gibt es beispielsweise absolut keine Linie, die auf unsere humanen Wellenlängen 435,50nm und 428,13nm passt, da nicht vorhanden, oder zu schwache Intensität.

Bei Zink und Titan sowie Natrium ähnlich.

Wir sind also auf Rubidium angewiesen. Hier fehlt uns dann allerdings eine Wellenlänge im orangen Bereich $\sim 584,40\text{nm}$ was wir durch das Natrium auffangen (LAMPE 4)

e) Hierzu übernimmt man wieder die erste Tabelle. Wir vernachlässigen aber nun die Rechnung von ϕ in das Beugemaß, da dies bereits bei c) gemacht wurde.

Man erhält δ also analog und es gilt:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad \text{mit} \quad \delta = (60,342 \pm 0,354)^\circ$$

$$= (1,05317 \pm 0,00618)_{\text{rad}}$$

$$\Rightarrow \Delta n = \frac{\left(\cos\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) \right)^2}{\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (\Delta\delta)$$

$$+ \left(\frac{\cos\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} (\Delta\delta) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{\cos\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} (\Delta\delta) \right)^2}$$

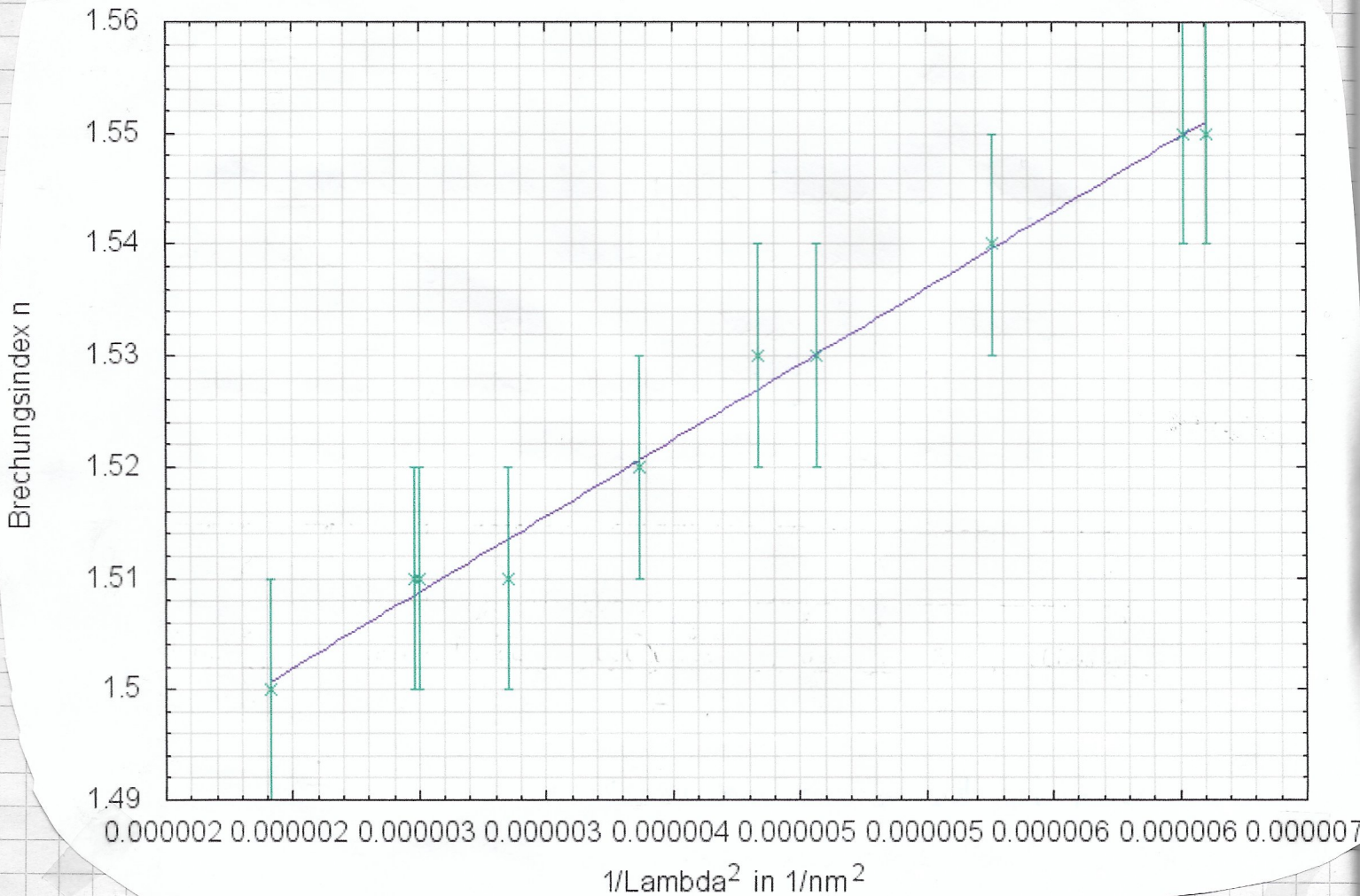
$$+ \left(\cos\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) (\Delta\delta) \right)^2$$

Außerdem berechnen wir $x = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta x = 2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda^3} = 0$, da $\Delta \lambda = 0$

Plottet man dann $\frac{1}{\lambda^2}$ gegen n , so erhält man außerdem den Plot unten.

Wellenlänge in nm	Winkel ϕ in °, ', ''	$\Delta \phi$ in °, ', ''	Winkel δ in rad	$\Delta \delta$ in rad	Brechungsindex n	Δn	$1/\lambda^2$ in $1/\text{nm}^2$
643.85	217° 30'	30'	0.6545	0.00873	1.50	0.01	0.0000024123
579.06	218° 24'	30'	0.6702	0.00873	1.51	0.01	0.0000029823
576.96	218° 30'	30'	0.672	0.00873	1.51	0.01	0.0000030041
546.07	218° 47'	30'	0.6769	0.00873	1.51	0.01	0.0000033535
508.58	219° 16'	30'	0.6853	0.00873	1.52	0.01	0.0000038662
479.99	219° 45'	30'	0.6938	0.00873	1.53	0.01	0.0000043405
467.82	220° 00'	30'	0.6981	0.00873	1.53	0.01	0.0000045692
435.83	220° 44'	30'	0.7109	0.00873	1.54	0.01	0.0000052646
407.78	221° 38'	30'	0.7267	0.00873	1.55	0.01	0.0000060138
404.65	221° 47'	30'	0.7293	0.00873	1.55	0.01	0.0000061072

$1/\text{Wellenlänge}^2$ gegen Brechungsindex n



Offensichtlich haben wir gute Werte für den Brechungsindex, denn für Plexiglas würden wir etwa $n=1,5$ erwarten.

Grundplot liefert hier für die Fit-Gerade $n = k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} + \dots$

$$k_0 = (1,4678 \pm 0,002081)$$

$$k_1 = (13648 \pm 476,4) \text{ nm}^2$$

Nun wissen wir auch, dass für das Auflösungsvermögen gilt:

$$A = \left| \frac{dn}{dx} \right| \cdot B$$

B haben wir gemessen zu: $B = (2,6 \pm 0,2) \text{ cm} = (2,6 \pm 0,2) \cdot 10^7 \text{ nm}$

$$\left| \frac{dn}{dx} \right| = \left| \frac{d}{dx} \left(k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} \right) \right| = 2 \frac{k_1}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow A = 2 \frac{k_1 \cdot B}{\lambda^3}, \quad \Delta A = \sqrt{\left(\frac{2B}{\lambda^3} (\Delta k_1) \right)^2 + \left(\frac{2k_1}{\lambda^3} \Delta B \right)^2}$$

Anßerdem gilt: $A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \Leftrightarrow \Delta \lambda = \frac{\lambda}{A}$

Einen Fehler brauchen wir für diesen Wert nur wirklich nicht mehr beachten, da es sich dabei bloß um eine Differenz handelt.
von Wellenlängen

Basisbreite B	ΔB	k_1	Δk_1	Wellenlänge λ	Aufl.verm. A	ΔA	aufl. W.l.diff $\Delta \lambda$
in nm	in nm	in nm ²	in nm ²	in nm	-	-	in nm
26000000	2000000	13648	476.4	400.00000	11089.00	936.72	0.03607
26000000	2000000	13648	476.4	500.00000	5677.57	479.60	0.08807
26000000	2000000	13648	476.4	600.00000	3285.63	277.55	0.18261

Das gelbe Dabell lag bei uns bei: bei fixen λ wird mit steigendem A $\Delta \lambda$ immer kleiner

$$\lambda_1 = 579,06 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 570,9 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = 275,24$$

Mit $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, also gemittelte Wellenlänge.

gilt wieder größeres A \rightarrow besser auflösbar?

ja

Dieses Auflösungsvermögen braucht man also mindestens, um die beiden Linien noch auflösen zu können.

Da wir für den gelben Wellenlängenbereich knapp ein Reflexionsvermögen des Prismas von 5000 errechnet haben, müssten wir diese Linien also auf jeden Fall ^{beide} gesehen haben.

Dies war auch der Fall, was unsere Rechnungen bestätigt. Der Wert scheint demnach extrem hoch und unrealistisch, was vermutlich auf Messfehler in B zurückzuführen ist, oder der Konstante K_1 , welche man ja ebenfalls über die Ablenkwinkel errechnet hat. Diese waren ja bereits mit großer Ungenauigkeit bestimmt worden.

Fazit:

Bei dem Versuch gab es keine großen Probleme beim Aufbau oder der Durchführung selbst, allerdings stellte es sich sehr schnell als schwierig heraus, exakte Winkel für die Ablenkung zu messen, bzw. zu bestimmen. Während wir den Winkel der brechenden Kante mit Hilfe der Reflexion noch sehr genau bestimmen konnten, haben wir bei der Kalibrationskurve bereits das Problem gehabt, genau festzulegen, welche Wellenlänge (geschätzt über die Intensität) wir bei gerade diesem Winkel überhaupt gemessen haben. Zusätzlich haben wir die Winkel mit dem Nonius bestimmt, und hier machen sich auf Grund der dünnen Beschriftung der Winkel über einen Bereich von etwa 4° kleine Fehler schnell bemerkbar.

Durch diese Fehler und aber auch die ermittelten Herstellerangaben gleichen Gründen bei dem unbekanntem Element haben dann für die Wellenlängen bei diesem Element sehr ungenaue

Werte gegeben. Es war beinahe unmöglich für die meisten Wellenlängen, diesen ein Element zuzuordnen, von welchem sie emittiert wurden. Die Fehler waren mit knapp 30nm einfach zu groß.

Auch beim letzten Versuch geht man wieder auf die gemessenen Ablenkwinkel des Hg/Cd-Spektrums zurück, sodass hier ebenfalls Messfehler entstehen. Man erhält so ziemlich absurde Werte für das Auflösungsvermögen, welche viel zu hoch scheinen. Dennoch kommt man zu dem richtigen Schluss, dass die gelbe Doppellinie auflösbar sein sollte, was wir auch messen konnten.