Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Übung 1 Theoretische Physik I, Blatt 1

a	b	c	d	Σ
6	3	6	5	20

Benedikt Gerves
Marvin Zanke
Florian Strachwitz

H1

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_r = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|}, \quad \vec{e}_\theta = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|}$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}{|\dots|} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ da } \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

6/6

b) Hier muss man ein bisschen überlegen und durch geschicktes anwenden von $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eine LK von den $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ basteln.

Ich behaupte: $\cos\varphi\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi = \vec{e}_x$

$$\begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos^2\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^2\theta\cos^2\varphi \\ \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_x$$

Außerdem: $\sin\varphi\sin\theta\,\vec{e}_r + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$$\begin{pmatrix} \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin^2\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\theta\sin^2\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_y$$

Und: $\cos\Theta \, \vec{e}_r - \sin\Theta \, \vec{e}_\Theta = \vec{e}_z$

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta\sin\Theta\cos\varphi \\ \cos\Theta\sin\Theta\sin\varphi \\ \cos^2\Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi \\ -\sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi \\ \sin^2\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

3/3

c) Es gilt: $\vec{\nabla}\phi = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\phi + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\phi$

Für Kugelkoordinaten gilt: $\vec{e}_r \cdot (\nabla\phi) \hat{=}$ die $\vec{e}_r$ Komponente von $\nabla\phi$ usw.

$$\Rightarrow \vec{e}_i \cdot (\nabla\phi) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right|} \cdot (\nabla\phi) = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\right|} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$ wegen

der Kettenregel.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\Theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

6/6

d) $V = \frac{1}{r}$, $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \nabla\left((x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right)$

$$= \left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2x, \ -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2y, \ -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2z\right)$$

$$= \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \ -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \ -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}(x,y,z) = -\frac{1}{r^3}\vec{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

$V = \frac{1}{r}$, $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{e}_r \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$

Die Berechnung in Kugelkoordinaten ist leichter. Das liegt daran, dass das Feld radialsymmetrisch ist.

5/5