Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Dieses Werk von Marvin Zanke ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

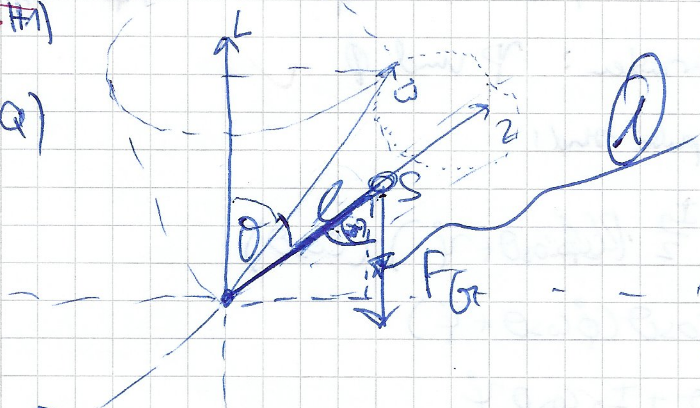
H1 18,5 | Σ 18,5

Theoretische Physik I Blatt 10

Marvin Zanke
Florian Stradiwitz
Till Weniger

H1)

a)



(1) Höhe des Schwerpunkts im Gravifeld: $h_s = l\cos\vartheta$, da ϑ der Winkel zur Figurenachse / z-Achse ist und man den Winkel bei (*) wiederfindet.

Für die Rotationsenergie des Kreisels gilt:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

Außerdem wissen wir aus der Vorlesung, dass für die Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\vartheta} \\ \sin\vartheta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\vartheta} \\ \cos\vartheta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

im körperfesten System (Auflagepunkt).

Damit gilt für T_{rot}:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_1[\sin\vartheta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\vartheta}]^2 + I_2[\sin\vartheta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\vartheta}]^2 + I_3[\cos\vartheta\dot{\phi} + \dot{\psi}]^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_1[\sin^2\vartheta\sin^2\psi\dot{\phi}^2 + 2\sin\vartheta\sin\psi\dot{\phi}\cos\psi\dot{\vartheta} + \cos^2\psi\dot{\vartheta}^2] + I_2[\sin^2\vartheta\cos^2\psi\dot{\phi}^2 + \sin^2\psi\dot{\vartheta}^2 - 2\sin\vartheta\cos\psi\dot{\phi}\sin\psi\dot{\vartheta}] + I_3[\cos^2\vartheta\dot{\phi}^2 + 2\cos\vartheta\dot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\psi}^2]\right)$$

$I = I_1 = I_2$

$$= \frac{1}{2}\left(I(\sin^2\vartheta\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + I_3[\cos\vartheta\dot{\phi} + \dot{\psi}]^2\right)$$

$$= \frac{I}{2}(\sin^2\vartheta\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{I_3}{2}(\cos\vartheta\dot{\phi} + \dot{\psi})^2$$

Für die potentielle Energie gilt bekanntlich: $V = mgh$

und mit (1) folgt $V = mgl\cos\vartheta$

$$\Longrightarrow L = T - V = \frac{I}{2}(\sin^2\vartheta\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{I_3}{2}(\cos\vartheta\dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\vartheta$$

3/3

b) zyklisch heißt, dass $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, s.d. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0 \Rightarrow p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \text{const (zeitlich)}$

Demnach sind zyklische Variablen: ψ und ϕ

Die zugehörigen kanonischen Impulse sind:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \frac{I}{2}\left(2\dot\phi \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\cdot 2(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cdot(\cos\theta)$$

$$= I\dot\phi \sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

$$= I\dot\phi\sin^2\theta + I_3\dot\phi\cos^2\theta + I_3\cos\theta\,\dot\psi$$

$$= I\dot\phi\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta$$ denn

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{I_3}{2}\cdot 2(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

2/2

c) Nicht zyklische Variable: θ

$$E = T + V = \frac{I}{2}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 + mgl\cos\theta$$

$$p_\phi - \cos\theta\, p_\psi = I\dot\phi\sin^2\theta \Rightarrow \frac{(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{I\sin^2\theta} = I\dot\phi^2\sin^2\theta$$

$$\frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{I_3}{2}(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\left(\frac{(p_\phi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{I\sin^2\theta} + I\dot\theta^2\right) + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

4/4

d) θ: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}(I\dot\theta) - \left[I\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)(-\sin\theta\,\dot\phi) + mgl\sin\theta\right]$$

$$\cancel{\left[= I\ddot\theta - I\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta + I_3\sin\theta\,\dot\phi(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) - mgl\sin\theta\right]}$$

$$= I\ddot\theta - \left[I\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - I_3\sin\theta\,\dot\phi(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) + mgl\sin\theta\right]$$

$$= I\ddot\theta - \sin\theta\left[I\dot\phi^2\cos\theta - I_3\dot\phi^2\cos\theta - I_3\dot\phi\dot\psi + mgl\right]$$

$$= I\ddot\theta - \sin\theta\left[(I - I_3)\dot\phi^2\cos\theta - I_3\dot\phi\dot\psi + mgl\right] = 0$$

3/3

c) $\theta = \text{const} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung:

$$\left[(I - I_3)\dot{\phi}^2 \cos\theta - I_3 \dot{\phi}\dot{\psi} + mgl\right] \sin\theta = 0$$

Damit die Gleichung sinnvolle Lösungen hat muss $\theta = \pi$ ebenfalls ausgeschlossen werden. Dann können wir durch $\sin\theta$ teilen.

$$(I - I_3)\dot{\phi}^2 \cos\theta - I_3 \dot{\phi}\dot{\psi} + mgl = 0 \qquad (*)$$

Für die zyklischen Variablen folgt:

(1) $p_\psi = I_3(\underbrace{\dot{\phi}\cos\theta}_{\text{const}} + \dot{\psi}) = \text{const}$

$$p_\phi = \underbrace{I\dot{\phi}\sin^2\theta}_{\text{const}} + \underbrace{p_\psi \cos\theta}_{\text{const, da } p_\psi \text{ Erhaltungsgröße}} = \text{const}$$

$\Rightarrow \dot{\phi} = \text{const} \Rightarrow \dot{\psi} = \text{const}$ nach (1)

(*) ist nun eine quadratische Gleichung in $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi}^2 (I - I_3)\cos\theta - \dot{\phi} I_3 \dot{\psi} + mgl = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}\frac{I_3\dot{\psi}}{(I - I_3)\cos\theta} + \frac{mgl}{(I - I_3)\cos\theta} = 0$$

$$\frac{I_3\dot{\psi}}{2(I - I_3)\cos\theta} \pm \sqrt{\frac{I_3^2\dot{\psi}^2}{4(I - I_3)^2\cos^2\theta} - \frac{mgl}{(I - I_3)\cos\theta}}$$

Fall $I = I_3$ oder $\theta = \frac{\pi}{2}$

3 Möglichkeiten:

(1) Wurzel $= 0$: $\Leftrightarrow \frac{I_3^2\dot{\psi}^2}{4(I - I_3)\cos\theta} = mgl$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{I_3\dot{\psi}}{2(I - I_3)\cos\theta}, \text{ exakte Lsg.}$$

(2) Wurzel > 0: $\Leftrightarrow \frac{I_3^2\dot{\psi}^2}{4(I - I_3)^2\cos^2\theta} > \frac{mgl}{(I - I_3)\cos\theta}$

$$\Leftrightarrow \dot{\psi}^2 > \frac{4mgl(I - I_3)\cos\theta}{I_3^2}$$

$$\Leftrightarrow |\dot{\psi}| > \frac{2\sqrt{mgl(I - I_3)\cos\theta}}{I_3}$$

Rotiert der Kreisel also mit bestimmter Frequenz um seine eigene Achse, so kippt er nicht und präzediert mit $\dot\phi_+$ oder $\dot\phi_-$. Eine davon ist eine schnelle Präzession und die andere eine langsame.

(3) Wurzel < 0: $\frac{I_3^2\dot\psi^2}{4(I-I_3)^2\cos^2\theta} < \frac{mgl}{(I-I_3)\cos\theta}$

$$\Leftrightarrow |\dot\psi| < \frac{2\sqrt{mgl(I-I_3)\cos\theta}}{I_3}$$

Ist der Kreisel zu langsam, so kippt er um. Die Wurzel wird imaginär und es gibt keine Präzession.

$\frac{3}{4}$

f) $$\dot\phi = \frac{I_3\dot\psi}{2(I-I_3)\cos\theta} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{I_3^2\dot\psi^2}{4(I-I_3)^2\cos^2\theta} - \frac{mgl}{(I-I_3)\cos\theta}}}_{\hat{=}\sqrt{x-c}}$$

Taylor von $\sqrt{x-c}$ um $c\approx 0$, da $x-c\approx x$ für große x liefert: $Tf(\sqrt{x-c}) = \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}c + O(c^2)$

$$\Rightarrow \dot\phi_1 \approx \frac{I_3\dot\psi}{2(I-I_3)\cos\theta} - \left(\frac{I_3\dot\psi}{2(I-I_3)\cos\theta} - \frac{1}{2\sqrt{x}}c\right)$$

$$= \frac{1\cdot 2(I-I_3)\cos\theta}{2\,I_3\dot\psi}\cdot\frac{mgl}{(I-I_3)\cos\theta} = \frac{mgl}{I_3\dot\psi}$$

$$\dot\phi_2 \approx 2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot c = \frac{I_3\dot\psi}{(I-I_3)\cos\theta} - \frac{1\cdot 2(I-I_3)\cos\theta}{2\cdot I_3\dot\psi}\,\frac{mgl}{(I-I_3)\cos\theta}$$

$$= \frac{I_3\dot\psi}{(I-I_3)\cos\theta} - \underbrace{\frac{mgl}{I_3\dot\psi}}_{\approx 0} \approx \frac{I_3\dot\psi}{(I-I_3)\cos\theta}$$, unabhängig von g

Aus der Vorlesung gilt für die Nutationsfrequenz für den kräftefreien sym. Kreisel

$$\Omega = \omega_3\frac{I_3-I}{I} \overset{\omega_3 \text{ mit Euler-Winkeln}}{=} \frac{I_3-I}{I}(\dot\psi+\cos\theta\,\dot\phi)$$

Es gilt mit Variablenumbenennung: $\Omega = \dot\phi$

$$\Rightarrow \dot\phi = \frac{I_3-I}{I}(\dot\psi+\cos\theta\,\dot\phi) \Leftrightarrow \dot\phi\left(1-\frac{I_3-I}{I}\cos\theta\right) = \frac{I_3-I}{I}\dot\psi$$

$$\Leftrightarrow \dot\phi\,(I - I_3\cos\theta + I\cos\theta) = (I_3-I)\,\dot\psi$$

$$\Leftrightarrow \dot\phi = \frac{I_3-I}{I(1+\cos\theta)-I_3\cos\theta}\,\dot\psi \approx \frac{I_3}{(I-I_3)\cos\theta}$$ für $I \ll 1$

$\frac{3,5}{4}$