Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Gruppe: Benedikt Gerwers

Theoretische Physik I Blatt 12

Marvin Zanke, Florian Strachwitz, Till Wengmann

H1	H2	Σ
8	12	20

H1) $Q = q\ ,\quad P = \sqrt{p} - q^2 \iff p = (P + q^2)^2 = (P + Q^2)^2$

a) $H(q,p) = \frac{p^2}{2m}$

$\dot{Q} = \dot{q}\ ,\quad \dot{P} = \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q}$ (*)

Nun gilt auch:

$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\ ,\quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$

Damit wird (*) zu: $\dot{P} = -2Q\dot{Q} = -2Q\frac{p}{m}$
$= -2Q\frac{(P+Q^2)^2}{m}$

$\iff -\dot{P} = 2Q\frac{(P+Q^2)^2}{m}\ ,\quad \dot{Q} = \dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{(P+Q^2)^2}{m}$

gesucht ist K s.d. $\frac{\partial K}{\partial Q} = -\dot{P}\ ,\quad \frac{\partial K}{\partial P} = \dot{Q}$

$K = \frac{1}{3}\frac{(P+Q^2)^3}{m}$ erfüllt dies offensichtlich.

4/4

b) Nehmen wir stattdessen $H = \frac{p^2}{2m} + aq$

So gilt mit der gleichen Transformation:

$\dot{Q} = \dot{q}\ ,\quad \dot{P} = \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q}$

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -a\ ,\quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

$\Rightarrow \dot{Q} = \dot{q} = \frac{p}{m} = \frac{(P+Q^2)^2}{m}\ ,\quad \dot{P} = \frac{-a}{2(P+Q^2)} - 2Q\dot{Q} =$
$= \frac{-a}{2(P+Q^2)} - 2Q\frac{(P+Q^2)^2}{m}$

Falls es eine solche Funktion gibt, so ist sie nicht 2mal stetig diffbar, insbesondere also nicht stetig und damit unphysikalisch, denn nach dem Satz von Schwarz gilt für solche Funktionen: $\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q}$. Dies gilt aber nicht, denn

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = \frac{\partial}{\partial Q} \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{(P+Q^2)^2}{m}\right) = \frac{2(P+Q^2)\cdot 2Q}{m}$$

$$= \frac{4Q(P+Q^2)}{m}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q} = \frac{\partial}{\partial P}(-\dot{P}) = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{a}{2(P+Q^2)} + 2Q\frac{(P+Q^2)^2}{m}\right)$$

$$= -\frac{a}{2}\frac{1}{(P+Q^2)^2} + \frac{2Q}{m}\cdot 2(P+Q^2)$$

$$= -\frac{a}{2(P+Q^2)^2} + \frac{4Q(P+Q^2)}{m}$$

Diese stimmen aber nur überein, falls $a=0$, und dies ist genau das Problem aus a)

$\frac{4}{4}$

H2)

a) $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad H = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + V$$

$$p_y = m\dot{y} \qquad\qquad = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + V = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V$$

$p_z = m\dot{z}$ für kartesische Koordinaten

Für Zylindrische Koordinaten folgt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$
$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V$$

$$\Rightarrow p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\Rightarrow H = m\dot{\rho}^2 + m\rho^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V$$
$$= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \frac{p_\varphi^2\rho^2}{m^2\rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + V$$
$$= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + V$$

Für Sphärische Koordinaten gilt:

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi + r\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi$$
$$+ 2\dot{r}r\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta\dot{\theta} - 2\dot{r}r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi} - 2r^2\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$
$$+ \dot{r}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2$$
$$+ 2\dot{r}r\sin\theta\sin^2\varphi\cos\theta\dot{\theta} + 2\dot{r}r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi} + 2r^2\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}$$
$$+ \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$
$$- 2r\dot{r}\cos\theta\cdot\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{r}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - V$$

$$\Rightarrow p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow H = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + V$$

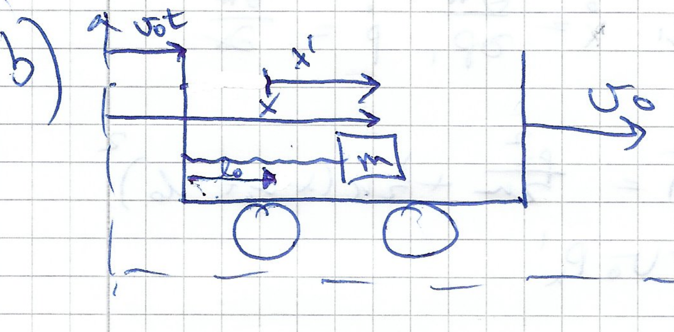
$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + V$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2 r^2}{m^2 r^4} + \frac{r^2\sin^2\theta\, p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4\theta}\right) + V$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V$$

3/3

b)



x' aus der Ruhelage des Massepunkts im Wagen gemessen.

Im Ruhesystem gilt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - v_0 t - l_0)^2$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow H = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - v_0 t - l_0)^2$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - v_0 t - l_0)^2$$
$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x - v_0 t - l_0)^2$$

Da $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ und $V = \frac{1}{2} k (x - v_0 t - l_0)^2 = \frac{1}{2} k x'^2$ ist $H = T + V$ offensichtlich. Da allerdings $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ und H explizit von der Zeit abhängt $\left[\frac{\partial H}{\partial t} = -k (x - v_0 t - l_0) v_0 \right]$ ist H keine Erhaltungsgröße.

5/5

c) $x = x' + v_0 t$ gilt in meiner Skizze nicht. Dort gilt: $x = x' + v_0 t + l_0$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{1}{2} k x'^2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m(\dot{x}' + v_0) = p_x'$$

$$\Rightarrow H = m(\dot{x}' + v_0)\dot{x}' - \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 + \frac{1}{2} k x'^2$$
$$= m(\dot{x}' + v_0)(\dot{x}' + v_0) - v_0 m (\dot{x}' + v_0) - \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 + \frac{1}{2} k x'^2$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 + \frac{1}{2} k x'^2 - v_0 p_x'$$
$$= \frac{p_x'^2}{2m} + \frac{1}{2} k x'^2 - v_0 p_x' = T + V - v_0 p_x'$$

also nicht mehr die Gesamtenergie. Allerdings keine explizite Zeitabhängigkeit mehr, also Erhaltungsgröße.

Für die Hamiltonschen Bewegl. gilt: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}$

Nochmal die Hamiltongleichungen:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - v_0 t - l_0)^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x - v_0 t - l_0)^2$$

$$H' = \frac{1}{2}m(\dot{x}' + v_0)^2 + \frac{1}{2}kx'^2 - v_0 p_x'$$

$$= \frac{p_x'^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2 - v_0 p_x'$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k(x - v_0 t - l_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{k}{m}(x - v_0 t - l_0) = -\frac{k}{m}x'$$

$$\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p_x'} = \frac{p_x'}{m} - v_0, \quad \dot{p}_x' = -\frac{\partial H'}{\partial x'} = -kx'$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = \frac{\dot{p}_x'}{m} = -\frac{k}{m}x' \quad \square$$

4/4