Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

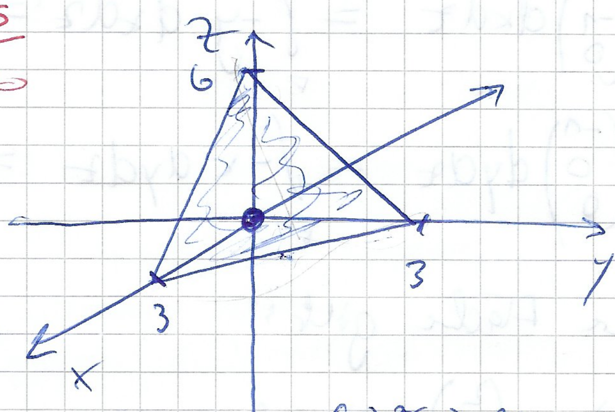
Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

24.04.2015 **Theoretische Physik Blatt 3**

Marvin Zanke
Florian Strechwitz
Till Wenigmann

H1) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3$

1a	1b	2a	2b	Σ
5	5	5	5	20



$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_V 3\,dV = 3\int_0^6\int_0^{3-\frac{z}{2}}\int_0^{3-y-\frac{z}{2}} dx\,dy\,dz = 3\int_0^6\int_0^{3-\frac{z}{2}}\left(3-y-\frac{z}{2}\right)dy\,dz$$

$$= 3\int_0^6\int_0^{3-\frac{z}{2}}\left(3-y-\frac{z}{2}\right)dy\,dz = 3\int_0^6\left[3y-\frac{1}{2}y^2-\frac{z}{2}y\right]_0^{3-\frac{z}{2}}$$

$$= 3\int_0^6\left(\left(9-\frac{3}{2}z\right)-\left(\frac{9+\frac{z^2}{4}-3z}{2}\right)-\left(\frac{3z}{2}-\frac{z^2}{4}\right)\right)dz$$

$$= 3\int_0^6\left(\frac{9}{2}-\frac{z^2}{8}-\frac{3}{2}z+\frac{z^2}{4}\right)dz = \int_0^6\left(\frac{9}{2}+\frac{z^2}{8}-\frac{3}{2}z\right)dz$$

$$= 3\left[\frac{9}{2}z+\frac{z^3}{24}-\frac{3}{4}z^2\right]_0^6 = 3[27+9-27] = 27$$

Das Volumen einer Pyramide ist $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei bei uns $h = 6$ und $G = \frac{1}{2}gh'$ mit $g = 3$, $h' = 3$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}gh'h = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 3\cdot 6 = 9$

Mit dem Vorfaktor 3 vom Kraftfeld erhält man dasselbe Ergebnis!

$\frac{5}{5}$

b) Für die Fläche in der x-z, x-y, y-z -Ebene gilt:

$$I_{xy} = \int_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\,dy = \int_F -z \; dx\,dy \overset{z=0}{=} 0$$

$$I_{xz} = \int_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx\,dz = \int_F -y \; dx\,dz \overset{y=0}{=} 0$$

$$I_{yz} = \int \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy\,dz = \int_F -x \; dy\,dz = 0$$ ✓

Für die andere Fläche gilt:

$\vec{\nabla}(2x + 2y + z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$ für den Normalenvektor auf der Ebene.

$|\vec{n}| = 3 \Rightarrow \vec{n}' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_F \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \frac{1}{3}\int_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6-2x-2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dA = \frac{1}{3}\int_F 6 \, dA = \int_F 2 \, dA$$

Die Fläche des Dreiecks ist: $\frac{1}{2} g h = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2}\left(\sqrt{6^2+1{,}5^2+1{,}5^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{18}\sqrt{36+\frac{9}{2}} = \frac{1}{2} 27$

$\Rightarrow 2\int_F 1 \, dA = 27$ ✓

5/5

H2) a)

$$\det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} \begin{array}{ccc|cc} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kl} & \delta_{km} \end{array}$$

$$= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}$$
$$- \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$$

Außerdem gilt: $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn} = \begin{cases} 1, & \text{falls beide zyklisch oder antiz.} \\ -1, & \text{falls einer zykl., der andere antiz.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Es gibt 3 Fälle, s.d. ϵ_{ijk} und ϵ_{lmn} beide zyklisch oder antizyklisch sind. Sie dürfen dann entweder keinen Index vertauscht haben, oder 2 Indizes.

$\Rightarrow$
- $\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}$
- $\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}$
- $\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}$

Summe bilden, da alle Fälle möglich:
$\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}$

Es gibt auch 3 Fälle, s.d. ein Tensor symmetrisch ist und der andere nach Vertauschung antisymmetrisch (1 Index vertauscht)

$\Rightarrow$
- $\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}$
- $\delta_{in}\delta_{kl}\delta_{jm}$
- $\delta_{jn}\delta_{km}\delta_{il}$

Summe und Vorzeichen "−", weil einer +, einer −:
$-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kl}\delta_{jm} - \delta_{jn}\delta_{km}\delta_{il}$

Vergleich mit oben liefert Behauptung.

$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sum_{i}^{N} \delta_{ii}$ ist die Spur der Matrix, in diesem Fall die Summe von 1en und damit $= N$.

5/5

b) Aus a) gilt: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}$
$- \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}$

Damit:

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \sum_i \big(\delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki}\big)$$

$$= \sum_i (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) + \delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{kn}) + \delta_{in}(\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ki}$$

$$= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \sum_i\sum_j \delta_{ii}\delta_{jj}\delta_{kn} + \delta_{ij}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{kj} - \delta_{in}\delta_{jj}\delta_{ki}$$

$$= \sum_i\sum_j \delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} - \delta_{in}\delta_{ki} + \delta_{ij}(\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{kj} - \delta_{kn})$$

$$= 9\delta_{kn} - 3\sum_j \delta_{jn}\delta_{kj} - 3\sum_i \delta_{in}\delta_{ki} + \delta_{jn}\delta_{kj} + \delta_{jn}\delta_{kj} - 3\delta_{kn}$$

$$= 9\delta_{kn} - 6\underbrace{\sum_i \underbrace{\delta_{in}\delta_{ki}}_{\delta_{kn}\delta_{kj}}}_{\delta_{kn}} + \underbrace{\delta_{in}\delta_{ki}}_{\delta_{kn}} + \underbrace{\delta_{in}\delta_{ki}}_{\delta_{kn}} - 3\delta_{kn}$$

$$= 2\delta_{kn}$$

Mit dem Ergebnis von a) viel einfacher:

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \sum_j\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} \overset{a)}{=} \sum_j \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj}$$

$$= \sum_j \delta_{kn} - \sum_j \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$$

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_k\sum_j\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} \overset{b)}{=} \sum_k 2\delta_{kk} = \sum_k 2 = 6$$

5/5