Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik I Blatt 4

Marvin Zanke, Florian Strachwitz, Till Wenigmann

14/20

H1) $B \propto \frac{\vec{r}}{r^3}$ und

(1) $m\ddot{\vec{r}} = \mu \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3}$ $\quad r(t_0) = r_0$, $v(t_0) = v_0$

$\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \neq 0$

a) $\frac{d}{dt}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{d}{dt}(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2)$

(2) $= 2\dot{r}_1 \cdot \ddot{r}_1 + 2\dot{r}_2 \cdot \ddot{r}_2 + 2\dot{r}_3 \ddot{r}_3 = 2(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})$

$= 2(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$

Mit (1) gilt $m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \mu \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ weil $\dot{\vec{r}} \perp (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}|\dot{\vec{r}}|^2 = 0$

$\frac{d^2}{dt^2}|\vec{r}|^2 = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \frac{d}{dt}(2r_1\dot{r}_1 + 2r_2\dot{r}_2 + 2r_3\dot{r}_3)$

(3) $= 2\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) = 2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + \underbrace{2(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}})}_{=0 \text{ weil } m\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \mu \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r} \text{ mit (1)}}$

$= 2|\dot{\vec{r}}|^2 = 2|\vec{v}_0|^2$

wegen Teil 1 ($|\dot{\vec{r}}|^2 = \text{const}$).

2/2

b)

Es gilt: $\frac{d^2}{dt^2}|\vec{r}|^2 = 2|\vec{v}_0|^2$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}|\vec{r}|^2 \overset{(*)}{=} 2|\vec{v}_0|^2 t + v_0'$

Nach (3) gilt auch $\frac{d}{dt}|\vec{r}|^2 = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$

und damit $\frac{d}{dt}|\vec{r}(0)|^2 = 2(\vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0)) = 2r_0v_0$

$\overset{(*)}{=} 2|\vec{v}_0|^2 \cdot 0 + v_0'$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}|\vec{r}|^2 = 2|\vec{v}_0|^2 t + 2r_0v_0$

$|\vec{r}(t)|^2 = |\vec{v}_0|^2 t^2 + 2r_0v_0t + r_0'$

$|\vec{r}(0)|^2 = r_0' = |\vec{r}_0|^2$

$\Rightarrow |\vec{r}(t)|^2 = |\vec{v}_0|^2 t^2 + 2r_0v_0t + |\vec{r}_0|^2$ (4)

Nach Aufgabenstellung gilt nun (bzw. ist zu zeigen:)

$|\vec{r}(t)|^2 = |\vec{v}_0|^2 \left(t^2 + \frac{2\vec{r}_0\vec{v}_0 t}{|\vec{v}_0|^2} + \frac{(\vec{r}_0\vec{v}_0)^2}{|\vec{v}_0|^4}\right) + \frac{|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0|^2}{|\vec{v}_0|^2}$

$$= |\vec{v}_0|^2 t^2 + 2 r_0 v_0 t + \frac{(\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0)^2}{|\vec{v}_0|^2} + \frac{|\vec{r}_0|^2 |\vec{v}_0|^2 - (r_0 v_0)^2}{|\vec{v}_0|^2}$$

$= |\vec{v}_0|^2 t^2 + 2 r_0 v_0 t + |r_0|^2$, was äquivalent zu (4) ist. $\frac{4}{4}$ ✓

c) $$\frac{d}{dt}\left(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} + \mu\left(-\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}{|r|^3}\right)$$

$$= \vec{r}\times\mu\frac{\vec{r}\times\vec{r}}{r^3} - \mu\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}{|r|^3} = 0 \Rightarrow m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}}{r} \stackrel{!}{=} \vec{J} = \text{const}$$ ✓

$\frac{3}{3}$

d) $\vec{r}(t)\cdot\vec{J} = \vec{r}(t)\left(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = \mu r$, da $\vec{r}(t) \perp (\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$ und $\vec{r}\cdot\vec{r} = |\vec{r}|^2$

Außerdem: $\vec{r}(t)\cdot\vec{J} = r(t)\cdot J\cdot \cos\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\mu}{J} \Rightarrow$ Kegel ✓ $\frac{2}{2}$

e) Es gilt $\frac{1}{mr^2}\left(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{m}\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\frac{\vec{r}}{r}$

$$= \frac{1}{r^2}\left((\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\times\frac{\vec{r}}{r} + \underbrace{\frac{\mu}{m}\frac{\vec{r}}{r}\times\frac{\vec{r}}{r}}_{0}\right) = \frac{1}{r^3}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r} = -\frac{1}{r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$$

Außerdem gilt $\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r_1/r \\ r_2/r \\ r_3/r \end{pmatrix} = \ldots -\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}{|r|^3}$ (Steht auf dem Zettel, hab ich aber auch nachgerechnet, ob dies glauben oder nicht ☺)

Die Gleichheit sieht man sofort. ✓ $\frac{3}{3}$

f) Betrachten wir die Funktion bzw. das Kreuzprodukt erstmal betragsmäßig aus Teil e):

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{y} = \frac{1}{mr^2} J \cdot \underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{y}$$

hier hast du noch die Vektoren ..

$|\vec{y}| = 1 = \text{const.}$

Es macht keinen Sinn den Betrag zu betrachten, da sich nur die Richtung ändert...

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{mr^2} J y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{mr^2} J dt$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \frac{1}{mr^2} J t$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{\frac{J}{mr^2} t}$$

Also $\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|} e^{\frac{J}{mr^2} t}$ mit $f(t) = \frac{t}{mr^2}$ (*)

Nun behaupte ich, dass die Gleichung auch das Kreuzprodukt löst.

Es gilt nämlich (Annahme, dass f) gilt)

$$\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = e^{\frac{t}{mr^2} A(\vec{J})} \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}$$

Berechnen wir davon die Ableitung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|} = \frac{1}{mr^2} e^{\frac{t}{mr^2} A(\vec{J})} A(\vec{J}) \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}$$

$$= \frac{1}{mr^2} e^{\frac{t}{mr^2} A(\vec{J})} J \times \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}$$

$$= \frac{1}{mr^2} J \times \underbrace{\left(e^{\frac{t}{mr^2} A(\vec{J})} \cdot \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}\right)}_{\frac{\vec{r}(t)}{r}}$$

f

wegen (*)

Also gilt die Diffglg. aus e). Diese ist außerdem eindeutig, da $\vec{r}(0)$ eine feste Lösung ist für $t=0$.

0/4

g) 2/2