Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik Blatt 5

Marvin Zanke
Florian Strachwitz
Till Wenigmann

H1	H2	H3	Σ
4	7	8	19

H1) z.z.: L_2 und L_1 haben die gleichen Bew.gl. durch die ELG.

ELG: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$, $\quad L_2(q,\dot q,t) = L_1(q,\dot q,t) + \frac{d\chi(q,t)}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot q} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{d\chi}{dt} - \frac{\partial L_1}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{d\chi(q,t)}{dt} = 0$$

$\Leftrightarrow$ (*) $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{d\chi}{dt} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{d\chi}{dt} = 0$ dann haben beide die gleichen Bew.gl.

$\dot q$ nur noch von t oder q abhängig!

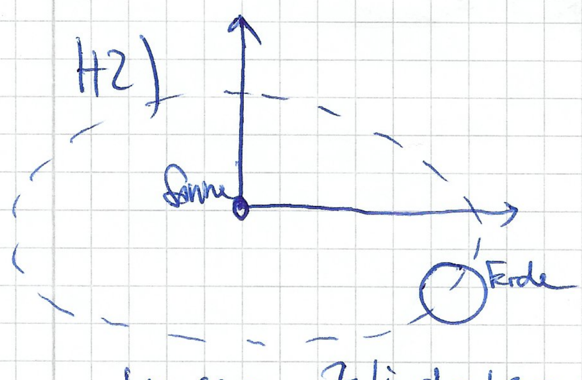
$$(*) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\frac{\partial\chi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial\chi}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\chi}{\partial q}\right) - \frac{\partial^2\chi}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2\chi}{\partial q\,\partial t}$$

$$= \frac{\partial^2\chi}{\partial q^2}\cdot\dot q + \frac{\partial^2\chi}{\partial t\,\partial q} - \frac{\partial^2\chi}{\partial q^2}\cdot\dot q + \frac{\partial^2\chi}{\partial q\,\partial t}$$

part. Abl. vertauschen $= 0$ ✓ 4/4

H2)



$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$, $\quad V = -\frac{\alpha}{r}$

Wir legen außerdem die Bewegung in eine Ebene, und zwar so, dass $z = 0$ gilt. Damit werden unsere Zylinderkoordinaten zu Polarkoordinaten.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + \frac{\alpha}{r}$$

$\dot r(t) = \begin{pmatrix} \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta \\ \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix}$, falls $r(t) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m(\dot r^2\cos^2\theta + r^2\dot\theta^2\sin^2\theta - 2r\dot r\dot\theta\sin\theta\cos\theta + \dot r^2\sin^2\theta + r^2\dot\theta^2\cos^2\theta + 2r\dot r\dot\theta\sin\theta\cos\theta) + \frac{\alpha}{r}$$

$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r}$ ✓ $\frac{3}{3}$

Es gilt offensichtlich $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = const$, also Erhaltungsgröße

und demnach ist θ zyklisch.

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ ist Erhaltungsgröße (Drehimpuls) $\boxed{L_z}$ ✓

Da die Lagrange glg. Zeitunabhängig ist folgt auch Energieerhaltung. ✓ $E = ?$ $\frac{2}{3}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} m\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$ ✓

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2r\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}) = 0$$ ✓

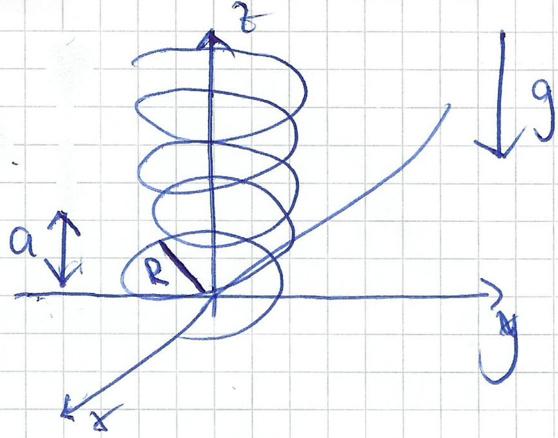
$\frac{2}{2}$

$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \stackrel{!}{=} const$

H3)

Ich wähle Zylinderkoordinaten.

Es gilt:



$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ r\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

wobei ich direkt verwendet habe, dass $r = \text{const.}$ (Zwangsbed. I)

Nun gilt noch als zweite Zwangsbed.: $z = -\frac{a\varphi}{2\pi}$ $\quad h = h_0 - \frac{a\varphi}{2\pi}$

wobei a die Ganghöhe ist.

$$\Rightarrow \dot{z} = -\frac{a}{2\pi}\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow r(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -a/2\pi\,\varphi \end{pmatrix}, \quad \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -a/2\pi\,\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{a^2}{4\pi^2}\dot{\varphi}^2\right) - V$$
$$= \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\dot{\varphi}^2\right) + mg\frac{a}{2\pi}\varphi \quad ✓$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi} + m\frac{a^2}{4\pi^2}\dot{\varphi}\right) - mg\frac{a}{2\pi}$$
$$= mr^2\ddot{\varphi} + m\frac{a^2}{4\pi^2}\ddot{\varphi} - mg\frac{a}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi}\left(r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right) = g\frac{a}{2\pi}$$

4/4

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} = \frac{ga/2\pi}{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \quad ✓ \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{ga/2\pi}{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}t + c_1$$

+ math. pos. Sinn anderer Ansatz führt auf Drehung im Uhrzeigersinn

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \; ; \; \varphi = \frac{1}{2}\frac{ga/2\pi}{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}t^2 + c_2 \quad ✓$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{ga/2\pi}{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}t^2 \quad ✓$$

4/4

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{a}{2\pi}\varphi(t) = -\frac{a^2}{8\pi^2}\frac{g}{r^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}}t^2 = \quad ✓$$