Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik I Blatt 6

Marvin Zanke
Florian Strachwitz
Till Wenigmann

H1	H2	Σ
~~8~~ 7	9.5	16.5

H1) a)

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \int_{r_1}^{r_2} dx \sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

Dann ist $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ die gesuchte Lagrange Funktion für das Wirkungsintegral. ✓

Ich weiß leider nicht wie das Äquivalent der Energie auszurechnen ist aber die Transformation in der Anwesenheitsaufgabe, aber ich löse stattdessen mit Hilfe des Hamiltonians:

Es gilt: $H = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\cdot\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_2}\cdot\frac{dq_2}{dt} - L$ ist die Erhaltungsgröße der Energie. Damit gilt dann:

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - \sqrt{1+y'^2+z'^2} \text{ ist Erh.größe.}$$

genau das war gemeint

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\, y' + \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\, z' - \sqrt{1+y'^2+z'^2} \text{ E.G.}$$

$$= \frac{y'^2+z'^2-(1+y'^2+z'^2)}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$ ✓

als Erhaltungsgröße (Äquivalent der Energie).

ELG: $\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0$ ✓

$\frac{3}{4}$ (~~4~~)

$$\Leftrightarrow \frac{y''\sqrt{1+y'^2+z'^2} - \frac{1\cdot y'y''+z'z''}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\, y'}{1+y'^2+z'^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y''(1+y'^2+z'^2) - y'^2y'' - z'z''y'}{(1+y'^2+z'^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow y''(1+ \quad +z'^2) - z'z''y' = 0$$

und analog: $z''(1+y'^2+ \quad) - y'y''z' = 0$

b) $\int \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$, da $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$; $\frac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi$, $\frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi$, $\frac{dz}{dz} = 1$

$$= \int \sqrt{(r^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2) + (r^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2) + (dz)^2}$$

$$= \int \sqrt{(r^2 d\varphi^2) + (dz)^2} = \int d\varphi \underbrace{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}}_{L} = \int d\varphi \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\cdot \dot q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot q_2}\dot q_2 - L \quad \text{ist Erhaltungsgröße}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot z}\cdot \dot z - L = \frac{1\cdot z'^2}{\sqrt{r^2+z'^2}} - \sqrt{r^2+z'^2} = \frac{-r^2}{\sqrt{r^2+z'^2}}$$

Äquivalent zur Energie

r ist keine deiner Koordinaten..

$$\text{ELG}\ 1: 0 = \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{d\varphi}\cdot 0 - \frac{r}{\sqrt{r^2+z'^2}} = 0$$

$\boxed{r=0\ ??}$ Nein $r = \text{konst}$

$$0 = \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{d\varphi}\frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}} - 0$$

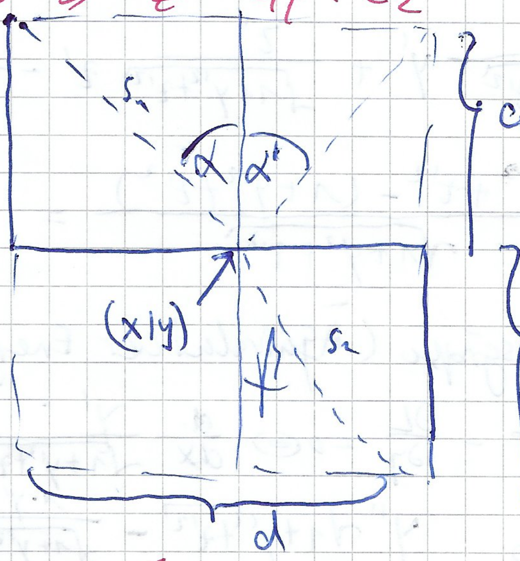
$$= \frac{z''\sqrt{r^2+z'^2} - \frac{rr'+z'z''}{\sqrt{r^2+z'^2}}z'}{r^2+z'^2} = \frac{z''(r^2+z'^2) - (rr'+z'z'')z'}{(r^2+z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{z''r^2 - rr'z'}{(r^2+z'^2)^{3/2}} \iff 0 = z''r^2 - \cancel{rr'z'}\ {=0}$$

$$\Rightarrow z'' = z' = 0 \Rightarrow z = c_1\varphi + c_2$$

$\frac{1}{2}$

c)



$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$\sin\beta = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$

$$t = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,n_1}{c_0} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}\,n_2}{c_0}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+a^2}\,c_0} - \frac{n_2(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}\,c_0}$$

$$\frac{dt}{dx} \overset{!}{=} 0$$

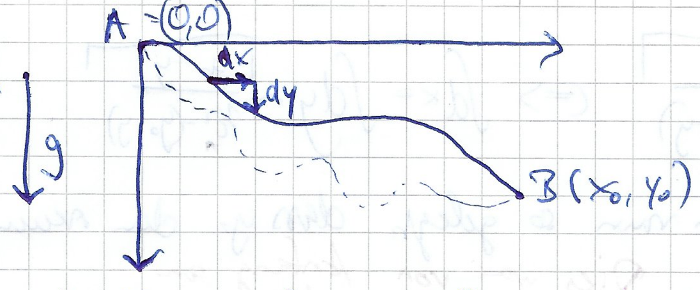
$$\overset{(*)}{\iff} 0 = \frac{n_1\sin\alpha}{c_0} - \frac{n_2\sin\beta}{c_0}$$

$$\iff n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta$$

Für $b \cancel{=} a$ (Nein) und (nur) $n_1 = n_2$ folgt hieraus sofort das Reflexionsgesetz: $\sin\alpha = \sin\beta \iff \alpha = \beta = \alpha'$

$\frac{3}{4}$

H2)



$v(t=0)=0$

a) $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \Leftrightarrow ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$= dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$

$\frac{1}{1}$ $= dy\sqrt{1+x'^2}$ ✓

$\boxed{2}$

b) $E_{pot}=mg(y-y_0)$, $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$

$|E_{pot}|=mg(y_0-y)$ ⟵ Warum zur Hölle sollte man das Koord.system nach unten legen? Anfangsbedingungen

Da du ~~startest~~ bei (0,0) anfängst und bei (x_0, y_0) endest

$|E_{pot}|=E_{kin} \Leftrightarrow mg(y_0-y)=\frac{1}{2}mv^2$

$E_{pot}=E_{kin} \Leftrightarrow v=\sqrt{2g(y_0-y)}$

d.h. $y_0=0$

$y>0$

$\frac{0.5}{1}$

$2g(y_0-y)<0$

c) $S[x]=\int_0^{y_0}\frac{1}{\sqrt{2g(\cancel{y_0}-y)}}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_0}\sqrt{\frac{1+y'^2}{\cancel{y_0}-y}}\,dx$

und auch $S[x]=\int_0^{y_0}\frac{1}{\sqrt{2g(\cancel{y_0}-y)}}\sqrt{1+x'^2}\,dy$

$\Rightarrow L=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+x'^2}{\cancel{y_0}-y}}$. Es gilt: $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ $\quad \frac{1}{1}$

d) $\Rightarrow$ ELG: $\frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial x'}=0=\frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{1}{\sqrt{y_0-y}}\cdot\frac{1\cdot 2x'}{2\sqrt{1+x'^2}}$

$\frac{2}{2}$ $\quad =\frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{x'}{\sqrt{\cancel{y_0}-y}\sqrt{1+x'^2}}=0$ ✓

e) Wenn dies null ist, ist der Term konstant, also nicht mehr von y abhängig. Insbesondere kann man den Term $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ als Vorfaktor weglassen.

$C_1=\frac{x'}{\sqrt{y_0-y}\sqrt{1+x'^2}} \Leftrightarrow x'^2=(y_0-y)(1+x'^2)C_1^2=$

$=y_0C_1^2+y_0x'^2C_1^2-yC_1^2-yx'^2C_1^2$

$\Leftrightarrow x'^2(1+C_1^2y-C_1^2y_0)=C_1^2(y_0-y)$

$\Leftrightarrow x'^2=\frac{C_1^2(y_0-y)}{1-C_1^2(y_0-y)}=\frac{y_0-y}{\frac{1}{C_1^2}-(y_0-y)}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y_0-y}{\frac{1}{c_1^2}-(y_0-y)}} \quad \Leftrightarrow \quad \int dx = \int dy \sqrt{\frac{y_0-y}{\frac{1}{c_1^2}-(y_0-y)}}$$

Sei das Koordinatensystem nun so gelegt, dass y_0 den neuen Nullpunkt definiert, also, Dies war von Anfang an gegeben...

$$x + c_2 = \int dy \sqrt{\frac{y}{\frac{1}{c_1^2}-y}}$$

Weiter substituieren wir

$$y = \frac{1}{c_1^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2c_1^2}(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2}{c_1^2} \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \int d\varphi \frac{1}{c_1^2} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{\frac{1}{c_1^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{c_1^2}-\frac{1}{c_1^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$= \frac{1}{c_1^2} \int d\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{\frac{1}{c_1^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{c_1^2}(1-\sin^2\frac{\varphi}{2})}}$$

$$= \frac{1}{c_1^2} \int d\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{c_1^2}\int d\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Mathematical kungfoo + kein Bock

$$= \frac{1}{2c_1^2}(\varphi - \sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad x + c_2 = \frac{1}{2c_1^2}(\varphi - \sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2c_1^2}(\varphi - \sin\varphi) - c_2$$

$$y = \frac{1}{c_1^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Dies ist offensichtlich eine Zykloide.

$x(0) = 0$, $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$x' = \frac{1}{2c_1^2}(1-\cos\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \Big|_{\varphi=0} \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{1}{c_1^2} \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{c_1^2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} \stackrel{!}{=} 0 \Big|_{\varphi=0} \Leftrightarrow$$

5/5