Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik I Blatt 7

Marvin Zanke
Florian Stadlwitz
Till Wenigmann

H1	H2	H3	Σ
4	7	7.5	18.5

H1) $\omega = \sqrt{k/m}$

a) Für den harmonischen Oszillator gilt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

2/2

Transformiert man nun $x = x' + \alpha \cos\omega t$,

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{x}' - \alpha\omega \sin\omega t$$

so folgt

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}' - \alpha\omega \sin\omega t)^2 - \frac{1}{2} k (x' + \alpha\cos\omega t)^2$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + \alpha^2\omega^2 \sin^2\omega t - 2\alpha\omega \dot{x}' \sin\omega t)$$

$$- \frac{1}{2} k (x'^2 + \alpha^2 \cos^2\omega t + 2\alpha x' \cos\omega t)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} k x'^2 \overbrace{- m\alpha\omega \dot{x}' \sin\omega t - k\alpha x' \cos\omega t}^{\frac{d}{dt} F(x', \alpha)}$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2} m \alpha^2 \omega^2 \sin^2\omega t - \frac{1}{2} k \alpha^2 \cos^2\omega t}_{\text{vernachlässigt}}$$

$$\Rightarrow F(x', \alpha) = - m\alpha\omega x' \sin(\omega t) \text{, denn dann gilt:}$$

$$\frac{d}{dt} F = - m\alpha\omega \dot{x}' \sin\omega t - \underbrace{m\alpha\omega^2 x' \cos\omega t}_{m\alpha \frac{k}{m} x' \cos\omega t}$$

b) Nach dem Noether Theorem ist die Erhaltungsgröße hier:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} F \Big|_{\alpha=0}$$

1/1

$$= m\dot{x} \cdot \cos\omega t\big|_{\alpha=0} + m\omega x' \sin\omega t\big|_{\alpha=0}$$

$= m\dot{x}\cos\omega t + m\omega x \sin\omega t$. Damit ist aber auch (mit teilen durch m) $J' = \dot{x}\cos\omega t + \omega x \sin\omega t$ eine Erhaltungsgröße. Damit spielt insbesondere das Minus auf dem Zettel falsch rein, wenn man die Transformation wie angegeben wählt. stimmt, allerdings ist (-1) auch nur eine konst...

c)

$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

$\Rightarrow \dot{x} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$

$\Rightarrow J = (-1)^k \left[(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)\cos\omega t + \omega\sin\omega t\,(a\cos\omega t + b\sin\omega t)\right]$

wobei $k \in \{0,1\}$

$= (-1)^k \left[(-a\omega\sin\omega t\cos\omega t + b\omega\cos^2\omega t) + (a\omega\sin\omega t\cos\omega t + b\omega\sin^2\omega t)\right]$

$= (-1)^k [b\omega]$ ✓ $\frac{1}{2}$

Interpretation: Frequenz ist konstant

$x = b\sin\omega t$

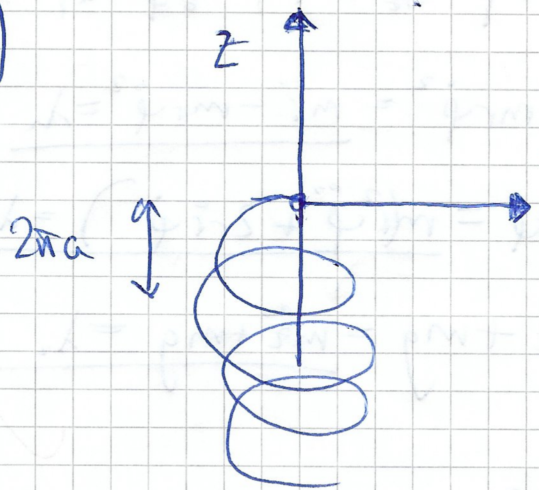
$x' = b\sin\omega t + \alpha\cos\omega t = A\sin(\omega t + \phi_0)$

$A = \frac{b}{\cos\phi_0}$, und $\sin\phi_0 = \alpha$

Amplitude und Phase ändert

H2)

a)



Wenn in der Aufgabenstellung ein Koordinatensystem gegeben ist, sollte das auch benutzen ...

$\Rightarrow z = -a\varphi$ (math. pos. Sinn)

$\rho = r = R$

$\Rightarrow \dot z = -a\dot\varphi$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec r}^2 - mgz$$

Zylinderkoordinaten, $\vec r = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec r} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi\cdot\dot\varphi \\ \rho\cos\varphi\cdot\dot\varphi \\ \dot z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{\vec r}^2 = \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m(\rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - mgz$$

ZB $\longrightarrow \quad = \frac{1}{2} m(\rho^2\dot\varphi^2 + a^2\dot\varphi^2) + mga\varphi$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\varphi + ma^2\dot\varphi) - mga$$

$$= m\rho^2\ddot\varphi + ma^2\ddot\varphi - mga$$

$\frac{2}{2}$

$$\Leftrightarrow m\ddot\varphi(\rho^2 + a^2) - mga$$

$$\Leftrightarrow \ddot\varphi = \frac{ga}{\rho^2 + a^2} \Rightarrow \dot\varphi(t) = \frac{ga}{\rho^2 + a^2}t + c$$

$\dot\varphi(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{ga}{\rho^2 + a^2}t^2 + c'$

$\varphi(0) = 0 \rightarrow c' = 0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{ga}{\rho^2 + a^2}t^2$$

$$\rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}\frac{ga^2}{\rho^2 + a^2}t^2$$

b)

$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{\vec r}^2 - mgz$, wobei $\dot{\vec r} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi \\ \dot z \end{pmatrix}$

$\frac{2}{2}$

$$= \frac{1}{2} m(\dot\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi - 2\dot\rho\cos\varphi\rho\dot\varphi\sin\varphi$$
$$+ \dot\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + 2\rho\sin\varphi\dot\rho\dot\varphi\cos\varphi + \dot z^2) - mgz$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - mgz$$ und $r - R = 0 = F_1$

$z + a\varphi = 0 = F_2$

c) $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial r} = 1$ | $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = a$, $\frac{\partial F_2}{\partial r} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 = \frac{d}{dt} m\dot r - mr\dot\varphi^2 = \underline{m\ddot r - mr\dot\varphi^2 = \lambda_1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \lambda_2 a = \frac{d}{dt} mr^2\dot\varphi = \underline{m(r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\dot\varphi) = \lambda_2 a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = \lambda_2 = \frac{d}{dt} m\dot z + mg = \underline{m\ddot z + mg = \lambda_2}$$

(*)

(*) λ_2 einsetzen in obere Gl.

$m(\ddot z + g)\cdot a = m(r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\dot\varphi)$ und ZB einsetzen: $r = R$, $z = -a\varphi$

$\Leftrightarrow (-a\ddot\varphi + g)a = R^2\ddot\varphi \Leftrightarrow \ddot\varphi(R^2 + a^2) = ga$

$\Leftrightarrow \ddot\varphi = \frac{ga}{R^2 + a^2}$

$\Rightarrow \lambda_2 = F_z = m\ddot z + mg = -ma\ddot\varphi + mg = -ma\frac{ga}{R^2+a^2} + mg$

$= -\frac{mga^2}{R^2+a^2} + mg = \underline{\underline{\frac{mg}{1 + \frac{a^2}{R^2}}}}$

$F_r = \lambda_1 \overset{\text{Zwangsbed.}}{=} -mr\dot\varphi^2 = -mr\frac{g^2a^2}{(R^2+a^2)^2}t^2$

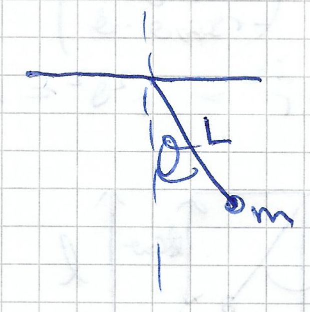
F_R wird größer, weil die Geschwindigkeit des Teilchens mit der Zeit steigt, ~~..~~ und damit die notwendige Kraft, es auf einer Kreisbahn zu halten. Dies stellt die ~~Zentripetalkraft~~ Fugal Zentrifugalkraft dar.

F_z wirkt entgegen der Gewichtskraft, und sorgt dafür, dass das Teilchen nicht bloß fällt, sondern die Schraubenbahn durchläuft.

3/3

H3)

a)



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} l\sin\vartheta \\ -l\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} l\cos\vartheta\cdot\dot\vartheta \\ l\sin\vartheta\cdot\dot\vartheta \end{pmatrix} = l\dot\vartheta \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}}_{\text{Bd.}\ = \vec{e}_\vartheta}$$

Bew: $\dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} l\cos\vartheta \\ l\sin\vartheta \end{pmatrix}}{l} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$

$$\ddot{\vec{r}} = l\ddot\vartheta\vec{e}_\vartheta + l\dot\vartheta\dot{\vec{e}}_\vartheta = l\ddot\vartheta\vec{e}_\vartheta - l\dot\vartheta^2\vec{e}_r$$, denn

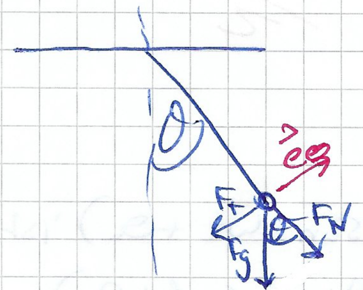
$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\,\dot\vartheta \\ \cos\vartheta\,\dot\vartheta \end{pmatrix} = \dot\vartheta\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{\text{Bd.}= -\vec{e}_r}$$

2/2

Bew: $\vec{e}_r = \dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix}}{1}$

1.5/2

b)



$\sin\vartheta\cdot F_g = F_L$

$\cos\vartheta\cdot F_g = F_N$

Actio = Reactio: An der Masse wirkt (ein Teil) der) die Gewichtskraft und zusätzlich die Zentrifugalkraft durch die Beschleunigung des Systems, die am Seil reisst.

Damit gilt $F_T = F_N + F_Z = mg\cos\vartheta + mr\omega^2$

$$\Leftrightarrow F_T = mg\cos\vartheta + ml\dot\vartheta^2$$

Außerdem gilt: $F = ma$

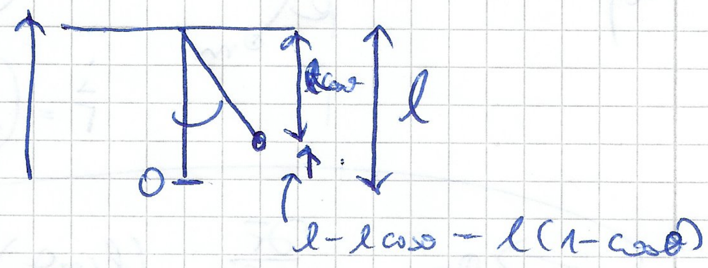
$\Leftrightarrow F_t = ml\ddot\vartheta$ (*), da die Tangentialkomponente für die Bewegung des Pendels verantwortlich ist. Bei einer Kreisbewegung ist außerdem die Beschleunigung $a = l\ddot\vartheta$.

!? (*) ist außerdem äquivalent zu: $-mg\sin\vartheta = ml\ddot\vartheta$. Warum „−" auf dem Blatt? Weil F_t negativ ist, $\vec{e}_\vartheta$ siehe a)

c) $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \cdot \dot\theta \\ -r\sin\theta \cdot \dot\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 = r^2\dot\theta^2 = l^2\dot\theta^2$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2$ ✓



$U = mgy$

$= mgl(1-\cos\theta)$ ✓

Das auf dem Blatt ist Quatsch! $U = -mgl\cos\theta$ ist insbesondere nicht 0 für $\theta = 0$. Das war aber verlangt.

Stimmt

Bewegungsglg. ist allerdings gleich, da bloß andere Nullpunktswahl.

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 - mgl(1-\cos\theta)$

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} ml^2\dot\theta + mgl\sin\theta$

$= ml^2\ddot\theta + mgl\sin\theta \Leftrightarrow l\ddot\theta + g\sin\theta = 0$ ✓

ELG natürlich einfacher!

2/2

d) $0 = l\ddot\theta + g\sin\theta \overset{*}{\approx} l\ddot\theta + g\theta$

$\Leftrightarrow \ddot\theta = -\frac{g}{l}\theta$

Bei $\theta = A\sin(\omega t + \theta_0)$ ist Lösung

$\dot\theta = A\omega\cos(\omega t + \theta_0)$

$\ddot\theta = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)$

$-A\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) \overset{!}{=} -\frac{g}{l} A\sin(\omega t + \theta_0)$

$\Leftrightarrow \omega^2 = g/l \Leftrightarrow \omega = \sqrt{g/l}$ ✓

2/2

Wo muss man Terme $O(\theta^2)$ vernachlässigen? *

* am Anfang