Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik Blatt 8

Marvin Zanke
Florian Stradewitz
Till Wenigmann

H1	H2	Σ
8	7	15

H1)

a) $\sin\theta_1 = \frac{x_1}{l_1}$, $\cos\theta_1 = \frac{-y_1}{l_1}$

$\sin\theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2}$, $\cos\theta_2 = \frac{-y_2 + y_1}{l_2}$

$\Rightarrow x_1 = l_1 \sin\theta_1$ ✓, $y_1 = -l_1\cos\theta_1$ ✓

$x_2 = x_1 + l_2\sin\theta_2$, $y_2 = y_1 - l_2\cos\theta_2$

$= l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2$ ✓ $= -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2$ ✓

Vorsicht! $\vec{x}_1 \neq x_1$, $\vec{x}_2 \neq x_2$

1/1

b)

$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}_2^2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2$

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = l_1\begin{pmatrix}\sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1\end{pmatrix}$

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = l_1\begin{pmatrix}\sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1\end{pmatrix} + l_2\begin{pmatrix}\sin\theta_2 \\ -\cos\theta_2\end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}_1 = l_1\dot{\theta}_1\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1\end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}_2 = l_1\dot{\theta}_1\begin{pmatrix}\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1\end{pmatrix} + l_2\dot{\theta}_2\begin{pmatrix}\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2\end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$ ✓

$\dot{\vec{x}}_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}_{\parallel})$ ✓

$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2))$
$+ l_1\cos\theta_1 m_1 g + m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$ ✓

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} =$

$= \frac{d}{dt}\left(m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$
$+ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_1gl_1\sin\theta_1 + m_2gl_1\sin\theta_1$ ✓

$= (l_1^2\ddot{\theta}_1)(m_1+m_2) + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$
$- m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cdot(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)$
$+ m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + gl_1\sin\theta_1(m_1+m_2)$

$$\Leftrightarrow 0 = \ddot\theta_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\cancel{l_1} l_2}{l_1}\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$+\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\dot\theta_1\dot\theta_2\cancel{\sin(\theta_1-\theta_2)} + g/l_1\sin\theta_1 \quad (1)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2} - \frac{\partial L}{\partial\theta_2}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(m_2 l_2^2\dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$
$$- m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2\sin\theta_2$$
$$= m_2 l_2^2\ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$- m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) + m_2 g l_2\sin\theta_2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ddot\theta_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \frac{l_1}{l_2}\dot\theta_1\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$- \frac{l_1}{l_2}\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2) + g/l_2\sin\theta_2 \quad (2)$$

$\cancel{3.5}$ 3/4

e) (1)
$$0 = \ddot\theta_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot\theta_2 - \frac{m_2}{m_1+m_2}l_1 l_2\dot\theta_2(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$+\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\dot\theta_1\dot\theta_2(\theta_1-\theta_2) + g/l_1\,\theta_1$$
$$= \ddot\theta_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot\theta_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2}l_1 l_2\underbrace{\dot\theta_2^2(\theta_1-\theta_2)}_{\approx 0} + g/l_1\,\theta_1$$
$$= \ddot\theta_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot\theta_2 + g/l_1\,\theta_1$$

(2)
$$0 = \ddot\theta_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot\theta_1 - \frac{l_1}{l_2}\dot\theta_1(\theta_1-\theta_2)(\dot\theta_1-\dot\theta_2)$$
$$- \frac{l_1}{l_2}\dot\theta_1\dot\theta_2(\theta_1-\theta_2) + g/l_2\,\theta_2$$
$$= \ddot\theta_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot\theta_1 - \frac{l_1}{l_2}\underbrace{\dot\theta_1^2(\theta_1-\theta_2)}_{\approx 0} + g/l_2\,\theta_2$$
$$= \ddot\theta_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot\theta_1 + g/l_2\,\theta_2$$

0.5/1

d) Demjenigen, der diese Aufgabe ohne die Vereinfachung aus dem Kuypers mit $m := m_1 = m_2$

$l := l_1 = l_2$

lösen will, wünsche ich viel Spaß. Wolfram Alpha liefert hierfür ein sehr langes Ergebnis. Ich löse stattdessen mit den zusätzlichen Annahmen, welche das Problem erheblich vereinfachen.

Das Problem wird nicht wirklich einfacher, du hast nur Zahlen für Konstanten eingesetzt.

$$\theta_1 = A_1 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{\theta}_1 = i\omega\theta_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1$$

$$\theta_2 = A_2 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{\theta}_2 = i\omega\theta_2 \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2$$

$$(1) \quad -\omega^2\theta_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}(-\omega^2\theta_2) + g/l_1\,\theta_1 = 0$$

$$(2) \quad -\omega^2\theta_2 + \frac{l_1}{l_2}(\omega^2\theta_1) + g/l_2\,\theta_2 = 0$$

✓ $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow (1) \quad \theta_1(g/l_1 - \omega^2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\omega^2\frac{l_2}{l_1}\theta_2$$

$$(2) \quad \theta_2(g/l_2 - \omega^2) = \frac{l_1}{l_2}\omega^2\theta_1$$

$$\Leftrightarrow (1) \quad \theta_1(g/l - \omega^2) = \frac{\omega^2}{2}\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\omega^2}{2}\theta_2\frac{1}{g/l - \omega^2}$$

$$(2) \quad \theta_2(g/l - \omega^2) = \omega^2\theta_1$$

✓

$(1) \to (2) \rightsquigarrow$

$$\theta_2(g/l - \omega^2) = \frac{\omega^4}{2}\theta_2\frac{1}{g/l - \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow (g/l - \omega^2)(g/l - \omega^2) = \frac{\omega^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g^2}{l^2} + \omega^4 - 2g/l\,\omega^2 = \frac{\omega^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 4g/l\,\omega^2 + 2\frac{g^2}{l^2}$$

$\frac{2}{3}$

$z := \omega^2$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4g/l\,z + 2\frac{g^2}{l^2} \xRightarrow{pq} 2g/l \pm \sqrt{4\frac{g^2}{l^2} - 2\frac{g^2}{l^2}}$$

$$= g/l(2 \pm \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2} = g/l(2 \pm \sqrt{2})$$ ✓ A_1? A_2?

$$\omega_{3/4} = -g/l(2 \pm \sqrt{2})$$ ← nicht physikalisch, da Frequenzen

[illegible]

H2)

$$\mathring{x}(t) = \mathring{x}_0(t) + \epsilon \mathring{x}_1(t) + \epsilon^2 \dot{x}_2(t) + \dots$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \ddot{x}_i(t) \cdot \epsilon^i$$

$$x^2(t) = x_0^2(t) + \epsilon (x_0(t) x_1(t) \cdot 2)$$

$$\ddot{x}_0(t) + \epsilon \ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 (x_0(t) + \epsilon x_1(t)) = \epsilon (x_0^2(t) + \epsilon (x_0(t) x_1(t) \cdot 2)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_0(t) + \omega_0^2 (x_0(t)) = 0$$

$$\wedge \ \epsilon \ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 \epsilon x_1(t) = \epsilon x_0^2(t)$$

$$\wedge \ \epsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 \epsilon^2 x_2(t) = \epsilon^2 (2 x_0(t) x_1(t)) \leftarrow \text{Teil b)}$$

bekannt: $x_0(t) = \cancel{A} e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}_0(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x_0(t)$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm i \omega_0$$

$$\Rightarrow x_0(t) = A' e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega_0 A' e^{i\omega_0 t} + (-i\omega_0) B e^{-i\omega_0 t}$$

$$0 = \dot{x}(0) = i\omega_0 A' - i\omega_0 B$$

$$\Leftrightarrow A' = B$$

$$\Rightarrow x_0(t) = A' \cdot 2\cos(\omega_0 t)$$

$$x_0(0) = A \Rightarrow A' \cdot 2 \Leftrightarrow A' = \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow x_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

ϵ^1

$$\Rightarrow \ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

folgt sofort daraus dass für $A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$ $A = B$ gelten muss, damit reell (Mengok...

Homogene Lsg bekannt: $x_1^h(t) = b\cos(\omega_0 t) + a\sin(\omega_0 t)$

Ansatz inhomogene Lsg: $x_1^{ih}(t) = \alpha + \beta\cos(2\omega_0 t)$

$$\ddot{x}_1^{ih}(t) = -\beta 4\omega_0^2 \cos(2\omega_0 t)$$

Add theorem von Blatt

$$\Rightarrow -4\beta\omega_0^2 \cos(2\omega_0 t) + \omega_0^2 (\alpha + \beta\cos(2\omega_0 t)) = \frac{A^2}{2}(1 + \cos(2\omega_0 t))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos(2\omega_0 t)}_{\forall t} \left(-4\beta\omega_0^2 + \omega_0^2 \beta - \frac{A^2}{2}\right) = \frac{A^2}{2} - \omega_0^2 \alpha$$

$$\forall t \Rightarrow \frac{A^2}{2} = \omega_0^2 \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{A^2}{2\omega_0^2}$$

$$-4\beta\omega_0^2 + \omega_0^2 \beta - \frac{A^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta(\omega_0^2 - 4\omega_0^2) = \frac{A^2}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{A^2}{6\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = x_1^h(t) + x_1^{i.h.}(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + \frac{A^2}{2\omega_0^2} - \frac{A^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t)$$

$x_1(0) = 0$, da $x_0(0) = A$ und $x(0) = A$ gelten soll

$\dot{x}_1(0) = 0$, da $\dot{x}_0(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad b + \frac{A^2}{2\omega_0^2} - \frac{A^2}{6\omega_0^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{A^2}{3\omega_0^2}$$

$$\dot{x}_1(t) = a\cos(\omega_0 t)\cdot\omega_0 + b(-\sin(\omega_0 t))\cdot\omega_0 + \frac{A^2}{3\omega_0}\sin(2\omega_0 t)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \Leftrightarrow a\omega_0 = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{A^2}{3\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{A^2}{6\omega_0^2}\left(3 - \cos(2\omega_0 t)\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0(t) + x_1(t) = A\cos(\omega_0 t)\left(1 - \epsilon\frac{A}{3\omega_0^2}\right) + \epsilon\frac{A^2}{6\omega_0^2}\left(3 - \cos(2\omega_0 t)\right)$$

5/5

b) Wie oben angegeben lautet der Term für die zweite Ordnung:

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = 2x_0(t)x_1(t)$$

keine lineare DGL mehr, sondern Produkt von $x_0(t)$ und $x_1(t)$ enthalten.

Physikalischer Grund?

2/3