Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik I Blatt 9

Marvin Zanke
Florian Stadtwitz
Till Wenigmann

H1	H2	Σ
7.5	~~16.5~~	24

H1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^2$

$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t)$

$\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon e_1 + \epsilon^2 e_2 + \dots$

$$\ddot{x}_0(t) + \epsilon \ddot{x}_1(t) + \epsilon^2 \ddot{x}_2(t) + (\omega^2 + \epsilon e_1 + \epsilon^2 e_2 + \dots)(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots)$$
$$= \epsilon (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots)^2$$

führt auf folgende Gleichungen:

ϵ^0: $\ddot{x}_0(t) + \omega^2 x_0(t) = 0$

ϵ^1: $\ddot{x}_1(t) + e_1 x_0(t) + \omega^2 x_1(t) = x_0^2(t)$ ✓

ϵ^2: $\ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) + \cancel{e_1 x_1(t)} + e_2 x_0(t) = 2 x_0(t) x_1(t)$

Für ϵ^0 gilt mit Ansatz: $x_0(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}_0(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$

$\Rightarrow x_0(t) = A' e^{i\omega t} + B' e^{-i\omega t}$ $\quad x_0(0) = A,\ \dot{x}_0(0) = 0$

$\Rightarrow$ (1) $A = A' + B'$

(2) $0 = i\omega A' - i\omega B' \Leftrightarrow A' = B'$

$\Rightarrow A = 2A' \Rightarrow B' = A' = \frac{A}{2}$

$\Rightarrow x_0(t) = A\cos(\omega t)$ ✓

ϵ^1: $\ddot{x}_1(t) + e_1 A\cos(\omega t) + \omega^2 x_1(t) = A^2\cos^2(\omega t)$

gefährlicher Term, muss verschwinden $\Rightarrow e_1 = 0$ ✓ $\qquad = \frac{A^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))$

$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) = \frac{A^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))$

homogene Lsg: $C'\cos(\omega t) + d'\sin(\omega t)$

Spezielle Lsg: $x_{1,inh.}(t) = \alpha + \beta\cos(2\omega t)$

$\ddot{x}_{1,inh}(t) = -4\omega^2\beta\cos(2\omega t)$

$-4\omega^2\beta\cos(2\omega t) + \alpha\omega^2 + \beta\omega^2\cos(2\omega t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t)$

$\Leftrightarrow \cos(2\omega t)(\beta\omega^2 - 4\beta\omega^2 - \frac{A^2}{2}) = \frac{A^2}{2} - \alpha\omega^2$

beide 0, da für alle Zeiten t gelten muss.

$\Rightarrow \alpha = \frac{A^2}{2\omega^2}$, $\beta = -\frac{A^2}{6\omega^2}$

$\Rightarrow x_1(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + \frac{A^2}{6\omega^2}(3-\cos(2\omega t))$

$0 = \dot{x}_1(0) = \omega b\cos(\omega t) \Rightarrow b = 0$

$0 = x_1(0) = a + \frac{A^2}{2\omega^2} - \frac{A^2}{6\omega^2} \Leftrightarrow a = -\frac{A^2}{3\omega^2}$

$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{A^2}{3\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{A^2}{6\omega^2}(3-\cos(2\omega t))$

$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + \epsilon\frac{A^2}{6\omega^2}(3-\cos(2\omega t)) - \epsilon\frac{A^2}{3\omega^2}\cos(\omega t)$ $\frac{3}{3}$

b) ϵ^2: $\ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) + \underbrace{e_1 x_1(t)}_{0} + e_2 x_0(t) = 2x_0(t)x_1(t)$

$\Leftrightarrow \ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) = 2A\cos(\omega t)\left[-\frac{A^2}{3\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{A^2}{2\omega^2} - \frac{A^2}{6\omega^2}\cos(2\omega t)\right]$

$- e_2 A\cos(\omega t)$

$\Leftrightarrow \ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) = -\frac{2}{3}\frac{A^3}{\omega^2}\cos^2(\omega t) + \frac{A^3}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\frac{A^3}{\omega^2}\cos(\omega t)\cos(2\omega t)$

$- e_2 A\cos(\omega t)$

$= -\frac{2}{3}\frac{A^3}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t)) + \frac{A^3}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\frac{A^3}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}(\cos(\omega t) + \cos(3\omega t))$

$- e_2 A\cos(\omega t)$

$= -\frac{A^3}{3\omega^2} - \frac{A^3}{3\omega^2}\cos(2\omega t) + \frac{A^3}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\cos(\omega t)$

$- \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\cos(3\omega t) - e_2 A\cos(\omega t)$

$= \cos(\omega t)\left[-e_2 A + \frac{A^3}{\omega^2} - \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\right]$

$+ \cos(2\omega t)\left[-\frac{A^3}{3\omega^2}\right] + \cos(3\omega t)\left[-\frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\right] - \frac{A^3}{3\omega^2}$

$\Rightarrow e_2 A = \frac{A^3}{\omega^2} - \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}$

$\Leftrightarrow e_2 = \frac{A^2}{\omega^2} - \frac{A^2}{6\omega^2} = \frac{A^2}{\omega^2}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}\frac{A^2}{\omega^2}$

$\Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon^2\frac{5}{6}\frac{A^2}{\omega^2}$

Auch hier gilt für die homogene Lsg.

$x_{2,h}(t) = f\cos(\omega t) + g\sin(\omega t)$

Für eine spezielle Lsg von

$-\frac{A^3}{3\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\cos(3\omega t) - \frac{A^3}{3\omega^2} = \ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t)$ gilt,

$x_{2,inh}(t) = \alpha + \beta\cos(3\omega t) + \gamma\cos(2\omega t)$

$\Rightarrow \ddot{x}_{2,inh}(t) = -9\omega^2\beta\cos(3\omega t) - 4\omega^2\gamma\cos(2\omega t)$

$\Rightarrow -9\omega^2\beta\cos(3\omega t) - 4\omega^2\gamma\cos(2\omega t) + \omega^2(\alpha + \beta\cos(3\omega t) + \gamma\cos(2\omega t))$
$= \frac{A^3}{3\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\cos(3\omega t) - \frac{A^3}{3\omega^2}$

$\Leftrightarrow \cos(3\omega t)\left[-9\omega^2\beta + \beta\omega^2 + \frac{1}{6}\frac{A^3}{\omega^2}\right]$
$+ \cos(2\omega t)\left[-4\gamma\omega^2 + \gamma\omega^2 + \frac{A^3}{3\omega^2}\right] = -\frac{A^3}{3\omega^2} - \omega^2\alpha$ ✓

$\Rightarrow -\frac{A^2}{3\omega^2} - \omega^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{A^3}{3\omega^4}$
$-8\omega^2\beta + \frac{A^3}{6\omega^2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{A^3}{48\omega^4}$
$-3\gamma\omega^2 + \frac{A^3}{3\omega^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{A^3}{9\omega^4} = \gamma$ ✓

$\Rightarrow x_2(t) = f\cos(\omega t) + g\sin(\omega t) - \frac{A^3}{3\omega^4} + \frac{A^3}{48\omega^4}\cos(3\omega t) + \frac{A^3}{9\omega^4}\cos(2\omega t)$
$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow g = 0$
$x_2(0) = 0 \Leftrightarrow f - \frac{A^3}{3\omega^4} + \frac{A^3}{48\omega^4} + \frac{A^3}{9\omega^4} = 0$
$\Leftrightarrow f = \frac{29}{144}\frac{A^3}{\omega^4}$

$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + \epsilon\frac{A^2}{6\omega^2}(3 - \cos(2\omega t)) - \epsilon\frac{A^2}{3\omega^2}\cos(\omega t)$
$+ \epsilon^2\frac{29}{144}\frac{A^3}{\omega^4}\cos(\omega t) - \epsilon^2\frac{A^3}{3\omega^4} + \epsilon^2\frac{A^3}{48\omega^4}\cos(3\omega t) + \epsilon^2\frac{A^3}{9\omega^4}\cos(2\omega t)$

$\frac{3.5}{4}$

c) $V(x) = D\frac{x^2}{2} - am\frac{x^3}{3}$
$\Rightarrow F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Dx + amx^2$

Für ω_0 gilt wie gehabt: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 1\,\frac{1}{s}$ ✓

Nach der störungstheoretischen Rechnung gilt wie eben gezeigt: $\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon^2\frac{5}{6}\frac{A^2}{\omega^2}$ $\frac{a}{\omega^2}$? $\frac{1}{3}$

$a = \epsilon$

Wolfram Alpha liefert für $1 = \omega^2 + \epsilon^2\frac{5}{6}\frac{A^2}{\omega^2}$ folgende zwei mögliche Lösungen (die 2 negativen lasse ich dabei direkt weg...):

$\omega_1 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-4a}}}{\sqrt{2}}$, $\omega_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{1-4a}+1}}{\sqrt{2}}$ f ii2)

Es gilt mit Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m}(E-U) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

Außerdem ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße:

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{const} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \Leftrightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{m}(E-U) = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2r^2} = \dot{r}^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2r^2}}$$

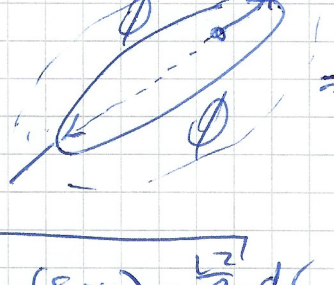
Nach dem Blatt gilt: $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dr} \cdot \dot{r}$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \dot{\phi}\frac{1}{\dot{r}} \Leftrightarrow d\phi = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}\,dr$$

$$\Rightarrow \phi = \int d\phi = \int \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}\,dr$$

$$\overset{!}{=} \int \frac{L}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}\,dr$$

Die zwei rührt daher, dass wir hier von r_{min} bis r_{max} integrieren. Dieses kommt bei einer Ellipse zweimal vor. Wir wollen aber den ganzen Winkel für eine Umdrehung!



$\hat{=} 2\phi$

Außerdem:

$$2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}} \overset{!}{=} -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,dr,$$

$\frac{6}{6}$

denn: $-2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,dr = -2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\partial}{\partial L}\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,dr$

$$= -2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{2\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}} \cdot -2L/r^2\,dr = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}\,dr,$$

weil $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x} = \frac{1}{\ldots} \cdot x'$

b) $U = U_0 + \delta U$. Taylor von $f(x) = \sqrt{a+x}$ um $x \approx 0$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x = \sqrt{a} + \frac{1 \cdot x}{2\sqrt{a}} + \mathcal{O}(x^2)$$

Für das Integral gilt: $-2\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{\underbrace{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}_{a} \underbrace{- 2m\,\delta U}_{x}}\, dr$ (*)

Der Runge Lenz-Vektor ist eine Erhaltungsgröße. Für diesen haben wir beim ungestörten Kepler Problem schon gezeigt, dass immer $\phi(t) = \alpha(t-t_0) + \phi_0$ gilt und da er const (Erhaltungsgröße) ist muss hier immer 2π gelten, da 2π bereits für einen Kreis gilt.

nicht lesbar

Taylor liefert:

$$(*) = -2\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \underbrace{\sqrt{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}}_{\text{Potential in nullter Ordnung}} \overset{!}{-} \frac{2m\,\delta U}{2\sqrt{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}} \overset{!}{}\, dr$$

Kreis?

Für die Korrektur gilt dann:

$$\delta\phi = -2\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} -\frac{m\,\delta U}{\sqrt{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}}\, dr = 2m\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\delta U}{\sqrt{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}}\, dr$$

Außerdem gilt (nach Blatt): $\dot\phi = \frac{d\phi}{dr} \cdot \dot r \Leftrightarrow dr = \frac{\dot r}{\dot\phi}\, d\phi$

$$\Rightarrow \delta\phi = 2m\frac{\partial}{\partial L} \int_0^{\pi} \delta U\, d\phi\, \frac{\dot r}{\dot\phi} \frac{1}{\sqrt{2m(E-U_0) - \frac{L^2}{r^2}}}$$ und mit $\dot r = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U_0) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$

und $\dot\phi = \frac{L}{mr^2}$

folgt: $$\delta\phi = 2m\frac{\partial}{\partial L} \int_0^{\pi} \frac{1}{m\dot\phi}\, \delta U\, d\phi = 2m\frac{\partial}{\partial L} \int_0^{\pi} \frac{r^2}{L}\, \delta U\, d\phi$$

$$= \frac{\partial}{\partial L} \frac{2m}{L} \int_0^{\pi} r^2\, \delta U\, d\phi$$ ✓

6/8

c) $\delta U_1 = \frac{\beta}{r^2}$

$$\Rightarrow \delta\phi = \frac{\partial}{\partial L} \frac{2m}{L} \int_0^\pi r^2 \frac{\beta}{r^2}\, d\phi = -2m\beta \frac{1}{L^2}\pi$$

$$= \frac{-2m\beta\pi}{L^2}$$

~~Kind~~

$\delta U_2 = \frac{\gamma}{r^3}$

$$\Rightarrow \delta\phi = \frac{\partial}{\partial L} \frac{2m}{L} \int_0^\pi r^2 \frac{\gamma}{r^3}\, d\phi = 2m\gamma \frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{L} \int_0^\pi \frac{1}{r}\, d\phi$$

Nach Vorlesung gilt für die ungestörte Bewegung:

$$r(\phi) = \frac{|\vec{L}|^2}{\mu k} \frac{1}{|\vec{B}|\cos\phi - 1}$$

einsetzen liefert:

$$\delta\phi = 2m\gamma \frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{L^3} \mu k \int_0^\pi (|\vec{B}|\cos\phi - 1)\, d\phi$$

$$= 2m\gamma \frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{L^3} \mu k \left[+|\vec{B}|\sin\phi - \phi\right]_0^\pi$$

$$= 2m\gamma \frac{-3}{L^4} \mu k (-1)\pi = -\frac{6m\gamma\mu k\pi}{L^4}$$

Nimmt man an, dass die Masse gleich der reduzierten ist und $k = \gamma$ gilt so folgt

$$\delta\phi = \frac{6\gamma^2 m^2 \pi}{L^4}$$

Bahnkurven?

$\frac{4.5}{6}$