Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Gruppe 3 **Theo II Zettel 1**

Johanna Daub
Martin Zaake
Florian Stadlwitz
Till Wenigmann

H1)
a) $\vec{K}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$, gesucht $\phi(x)$, sd. $\frac{\partial}{\partial x}\phi = \vec{K}(\vec{x})$

$-\text{grad}\,\phi = \vec{K}(\vec{x})$
Vektor!

$\exists\, \phi$ gdw. $\text{rot}\,\vec{K}(\vec{x}) = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_3} - \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x_1} - \frac{\partial K_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3x_2x_3/|\vec{x}|^5 + 3x_2x_3/|\vec{x}|^5 \\ -3x_1x_3/|\vec{x}|^5 + 3x_3x_1/|\vec{x}|^5 \\ -3x_2x_1/|\vec{x}|^5 + 3x_1x_2/|\vec{x}|^5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$ also Ja!

also ok

$\cancel{+/\text{grad}}\ \frac{\partial}{\partial x_1}\phi = K_1(\vec{x}) \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad \cancel{\phi}$

OBdA. $\int \frac{x_1}{|\vec{x}|^3}\,dx_1 = \int \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3}\,dx_1$, $z = x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$= \int \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3}\frac{1}{2x_1}\,dz$ $\qquad \frac{dz}{dx_1} = 2x_1$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^{3/2}}\,dz = \left[-z^{-1/2} + C\right] = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + C$

$= -\frac{1}{|\vec{x}|} + C$

Analog für x_2, x_3

$\longrightarrow \phi(\vec{x}) = +\frac{1}{|\vec{x}|}$, da $\lim_{|\vec{x}|\to 0}\phi(\vec{x}) = 0 \Rightarrow C = 0$

b) $\vec{k}(\vec{x}) = -\vec{x} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_3}{\partial x_2} - \frac{\partial k_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_3} - \frac{\partial k_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial k_2}{\partial x_1} - \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0$

$\int -x_1\, dx_1 = -\frac{1}{2}x_1^2 + C$ ...

$\Rightarrow \phi(\vec{x}) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + C = -\frac{1}{2}|\vec{x}|^2$

da $\lim_{|x|\to 0} \phi(\vec{x}) = 0$

c) Warum kann man den Satz von Gauß hier nicht anwenden? weil singulär im Ursprung

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad |\det| = R^2\sin\theta$

$\int_{F_k} \vec{k}\cdot d\vec{f} = \int_{\partial A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / R^3 \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} R^2\sin\theta\, dA$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2\sin\theta}{R^3}\left(R\cos^2\varphi\sin^2\theta + R\sin^2\varphi\sin^2\theta + R\cos^2\theta\right) d\theta\, d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2\sin\theta}{R^3}\left(R\sin^2\theta + R\cos^2\theta\right) d\theta\, d\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta\, d\varphi\, \sin\theta = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$

$= 4\pi$ ✓

d) Nun aber sicher Satz von Gauß, da der Mittelpunkt ausgeschlossen ist. → Alles was rausgeht kommt auch wieder rein.

$\int_{F_k} \vec{k}\cdot d\vec{f} = \int_{V_k} (\nabla\cdot\vec{k})\, dV = 0$, da

$\vec{\nabla}\cdot\vec{k} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1/|\vec{x}|^3 \\ x_2/|\vec{x}|^3 \\ x_3/|\vec{x}|^3 \end{pmatrix} = \frac{|\vec{x}|^3 - 3|\vec{x}|^2\cdot\frac{x_1^2}{|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^6} + \frac{|\vec{x}|^3 - 3x_2^2|\vec{x}|}{|\vec{x}|^6} + \frac{|\vec{x}|^3 - 3x_3^2|\vec{x}|}{|\vec{x}|^6}$

da $\frac{\partial}{\partial x_i}(|\vec{x}|) = \frac{x_i}{|\vec{x}|}$

$= (3|\vec{x}|^3 - 3|\vec{x}|^3)\frac{1}{|\vec{x}|^6} = 0$