Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 10 Marvin Zanke

H11

a) O.B.d.A zeigen wir den Fall $|\vec{x}| > |\vec{y}|$, der andere folgt analog.

$\frac{1}{|\vec{x}|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}\right)^n P_n(\cos\alpha)$ kann man mit Hilfe der Entwicklung aus dem Blatt ($\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \hat{=} |t| < 1$ und $\cos\alpha \hat{=} z \leq 1$) umschreiben zu:

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}\cos\alpha + \left(\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}\right)^2}} = \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2} + \left(\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\vec{y}}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right)^2}} = \frac{1}{|\vec{x}|} \sqrt{\frac{1 \cdot |x|^2}{(\vec{y}-\vec{x})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\vec{y}-\vec{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^2}} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Da symmetrisch in x und y folgt der andere Fall durch Vertauschen. ✓

b) Mit der Rodrigues-Formel gilt:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$$

$$P_0(z) = \frac{1}{1} \frac{d^0}{dz^0} (z^2-1)^0 = 1 \quad ✓$$

$$P_1(z) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (z^2-1) = \frac{1}{2} 2z = z \quad ✓$$

$$P_2(z) = \frac{1}{4\cdot 2} \frac{d^2}{dz^2} (z^2-1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dz} \left\{ 2(z^2-1)\cdot 2z \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (z^2-1) + 2z^2 \right\}$$

$$= \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2} \quad ✓$$

c) $\frac{\partial}{\partial z}(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}g(z,t) + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}t\,g(z,t) \overset{!}{=} 0$ (*)

mit $g(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = (1-2tz+t^2)^{-1/2}$

$g'(z,t) = -\frac{1}{2}(1-2tz+t^2)^{-3/2}\cdot(-2t) = \frac{t}{(1-2tz+t^2)^{3/2}} = t(1-2tz+t^2)^{-3/2}$

$g''(z,t) = -\frac{3}{2}t(1-2tz+t^2)^{-5/2}\cdot(-2t) = 3t^2(1-2tz+t^2)^{-5/2}$

$\dot{g}(z,t) = -\frac{1}{2}(1-2tz+t^2)^{-3/2}(-2z+2t) = (z-t)(1-2tz+t^2)^{-3/2}$

$\ddot{g}(z,t) = -(1-2tz+t^2)^{-3/2} + (z-t)(-\frac{3}{2})(1-2tz+t^2)^{-5/2}(-2z+2t)$

$= 3(z-t)^2(1-2tz+t^2)^{-5/2} - (1-2tz+t^2)^{-3/2}$

$\Rightarrow$ (*) $= -2z\,g'(z,t) + (1-z^2)g''(z,t) + t\frac{\partial}{\partial t}\{g(z,t) + t\dot{g}(z,t)\}$

$= -2z\,g'(z,t) + (1-z^2)g''(z,t) + t\{2\dot{g}(z,t) + t\ddot{g}(z,t)\}$

$= \underline{-2zt(1-2tz+t^2)^{-3/2}} + 3(1-z^2)t^2(1-2tz+t^2)^{-5/2}$
$\underline{+2t(z-t)(1-2tz+t^2)^{-3/2}} + 3t^2(z-t)^2(1-2tz+t^2)^{-5/2} - t^2(1-2tz+t^2)^{-3/2}$

$= 3(1-z^2)t^2(1-2tz+t^2)^{-5/2} - 2t^2(1-2tz+t^2)^{-3/2} - t^2(1-2tz+t^2)^{-3/2}$
$+3t^2(z-t)^2(1-2tz+t^2)^{-5/2}$

$= 3(1-z^2)t^2(1-2tz+t^2)^{-5/2} - 3t^2(1-2tz+t^2)^{-3/2}$
$+3t^2(z^2+t^2-2zt)(1-2tz+t^2)^{-5/2}$

$= (1-2tz+t^2)^{-5/2}\cdot\{\underbrace{3(1-z^2)t^2 - 3t^2(1-2tz+t^2) + 3t^2(z^2+t^2-2tz)}_{\cancel{3t^2} - \cancel{3z^2t^2} - \cancel{3t^2} + \cancel{6t^3z} - \cancel{3t^4} + \cancel{3t^2z^2} + \cancel{3t^4} - \cancel{6t^3z} = 0}\}$

$= 0$

Hinweis ∎

Nun bleibt noch die Behauptung zu zeigen dass

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n - 2z\frac{d}{dz}P_n + n(n+1)P_n \overset{!}{=} 0$$

Dazu fangen wir mit dem Hinweis an und ersetzen $g(z,t)$ durch deren Reihenentwicklung:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(z)\right) + t\frac{\partial^2}{\partial t^2} t\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial z}P_n(z) + t\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n P_n(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(1-z^2)t^n\frac{\partial}{\partial z}P_n(z) + t\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,t^{n-1}P_n(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{t^n\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}P_n(z)\right)(1-z^2) - 2z\,t^n\frac{\partial}{\partial z}P_n(z)\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n P_n(z)$$

Summand für n=0 trägt nichts bei !

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n\left\{(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}P_n(z) - 2z\frac{\partial}{\partial z}P_n(z) + n(n+1)P_n(z)\right\}$$

Diese Potenzreihe ist: $= 0 = \sum_{n=0}^{\infty} t^n 0^n$

Alle Koeffizienten müssen schon übereinstimmen und so folgt

$$(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}P_n(z) - 2z\frac{\partial}{\partial z}P_n(z) + n(n+1)P_n(z) = 0 \quad \forall n$$

?

Wieso wird hier so willkürlich mit part. und totalen Abl. rumgeworfen? Gibt keinen Unterschied zwischen $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{d}{dz}$ in unserem Fall?

genau

?

d)

$$0 = P_m(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n - 2zP_m\frac{d}{dz}P_n + n(n+1)P_mP_n \quad \text{I}$$

$$0 = P_n(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_m - 2zP_n\frac{d}{dz}P_m + m(m+1)P_nP_m \quad \text{II}$$

$$\text{I}-\text{II} \Leftrightarrow 0 = P_m(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_n - P_n(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}P_m - 2zP_m\frac{d}{dz}P_n + 2zP_n\frac{d}{dz}P_m$$

$$+ \left\{n(n+1)P_mP_n - m(m+1)P_nP_m\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{m(m+1)P_nP_m - n(n+1)P_mP_n\right\} = P_m\left\{\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n\right\} - P_n\left\{\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m\right.$$

Nun integriert man über das Intervall $[-1;1]$ (P_n und P_m kommutieren)

$$\underbrace{\{m(m+1)-n(n+1)\}}_{(*)}\int_{-1}^{1} dz\, P_n P_m$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1}\left[P_m \frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n\right\}\right]dz}_{C} - \underbrace{\int_{-1}^{1}\left[P_n \frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m\right\}\right]dz}_{C'}$$

(*) ist sicherlich nur gleich 0 falls $m=n$ (m positiv; ?

Andere Lösung: $m=-(n+1)$ ←

? → Wie arbeitet man den Fall $m=-(n+1)$ ab? Auch dort gilt diese Rechnung ja nicht?

Damit bleibt zz: $C = C'$

$$C \overset{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\left[P_m\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n\right\}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\frac{d}{dz}P_m\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n\right\}dz$$

$$\cancel{\int_{-1}^{1}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n\right\}dz}$$

$$\cancel{= \underbrace{\left[P_n(1-z^2)\right]_{-1}^{1}}_{0} + \int_{-1}^{1} 2z P_n\, dz}$$

$$\cancel{= 0 + \int_{-1}^{1} 2z P_n\, dz}$$

$m,n \geq 0$ gibt nur eine Lösung

$$\Rightarrow C = -\int_{-1}^{1}(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m \frac{d}{dz}P_n = -\left\{\overbrace{\left[P_n(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m\right]_{-1}^{1}}^{0} - \int_{-1}^{1} P_n\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m\right\}dz\right\}$$

$$= \int_{-1}^{1} dz\, P_n \frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_m\right\} = C'$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} dz\, P_n P_m = 0 \text{ falls } n \neq m \text{ und } \cancel{m \neq -(n+1)}$$

e) $Y_{00}(\theta,\varphi) = \underbrace{N_{00}}_{\sqrt{\frac{1}{4\pi}}} \underbrace{P_0^0(\cos(\theta))}_{*} \underbrace{e^{i0\varphi}}_{1} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ ✓

$$* = (-1)^0 (1-z^2)^0 \frac{d^0}{dz^0} P_0(z) = 1$$

$$Y_{1m} = N_{1m} P_1^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$\underline{m=0}$: $\sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1^0(\cos\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1(z) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$ ✓

?

$\underline{m=1}$: $\sqrt{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{2}} P_1^1(\cos\theta) \cdot e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} (-1)(1-z^2)^{1/2} \cdot 1 \Big|_{z=\cos\theta}$

Ist das
$\pm$ nötig
wegen $\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$= \pm \sin\theta$?
bzw. der Betrag! ← ?

$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} |\sin\theta|$ ✓

ohne Beträge
Wurzel m. $\oplus$ zu
nehm

$\underline{m=-1}$: $\sqrt{\frac{3}{4\pi} \cdot 2} P_1^{-1}(\cos\theta) e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{6}{4\pi}} (-1) \frac{0!}{2!} P_1^1(\cos\theta) e^{-i\varphi}$

$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (-1) (1-z^2)^{1/2} e^{-i\varphi} \Big|_{z=\cos\theta}$

$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} |\sin\theta| e^{-i\varphi}$ ✓

$$P_1(\cos\alpha) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz}(z^2-1) \Big|_{z=\cos\alpha} = \cos\alpha = \frac{\vec{\Omega}_1 \cdot \vec{\Omega}_2}{|\vec{\Omega}_1||\vec{\Omega}_2|}$$

$$\sum_{m=-1}^{m=1} \overline{Y_{1m}(\vec{\Omega}_1)} Y_{1m}(\vec{\Omega}_2) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_1 e^{i\varphi_1} \cdot \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_2 e^{-i\varphi_2}$$

$$+ \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta_2 + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi_1} \sin\theta_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi_2} \sin\theta_2$$

$$= \frac{3}{8\pi} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \sin\theta_1 \sin\theta_2 + \frac{3}{4\pi} \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \frac{3}{8\pi} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$= \frac{3}{8\pi} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \{ \underbrace{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}}_{2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \} + \frac{3}{4\pi} \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{3} \sum \quad = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

Mit $\vec{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \cos\varphi_1 \\ \sin\theta_1 \sin\varphi_1 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix}$, $\vec{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta_2 \cos\varphi_2 \\ \sin\theta_2 \sin\varphi_2 \\ \cos\theta_2 \end{pmatrix}$ Polyl

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\Omega}_1 \cdot \vec{\Omega}_2}{|\vec{\Omega}_1|\,|\vec{\Omega}_2|} = \sin\theta_1 \cos\varphi_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 + \sin\theta_1 \sin\varphi_1 \sin\theta_2 \sin\varphi_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$= \sin\theta_1 \sin\theta_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

und damit Gleichheit und die Behauptung.

f) $\vec{x}_1 = r_1 \vec{\Omega}_1$, $\vec{x}_2 = r_2 \vec{\Omega}_2$

Nach Aufgabe a) gilt: (OBdA $r_1 > r_2$)

$$\frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} = \frac{1}{|\vec{x}_1|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{x}_2|}{|\vec{x}_1|}\right)^n P_n(\cos\alpha)$$

$$\overset{e)}{\Rightarrow} = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{m=n} \overline{Y_{nm}}(\vec{\Omega}_1) Y_{nm}(\vec{\Omega}_2)$$

g) $$A^0(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}') = \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(|\vec{x}'|) Y_{lm}(\vec{\Omega}')$$

$r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}'|$

$$\Rightarrow A^0(r,\theta,\varphi) = \int_0^R dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \frac{1}{r} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^p \frac{4\pi}{2p+1} \sum_{q=-p}^{p} \overline{Y_{pq}}(\theta,\varphi) \cdot Y_{pq}(\theta',\varphi') \;?\; ?$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r') Y_{lm}(\theta',\varphi')\, r'^2 \sin\theta'$$

Wieso muss man $f_{lm}(r')$ nicht mit auswerten im Integral über $d\varphi', d\theta'$?

weil es von θ', φ' nicht abhängt

$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$ und damit darf die Konjugation über $Y(\theta',\varphi')$ und $Y(\theta,\varphi)$ vertauscht werden

$$= \int_0^R dr' \frac{1}{r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(r')^p}{r^p} \frac{4\pi}{2p+1} \sum_{q=-p}^{p} Y_{pq}(\theta,\varphi)$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm}(r')\, r'^2 \underbrace{\int\int d\theta' d\varphi' \overline{Y_{pq}}(\theta',\varphi') Y_{lm}(\theta',\varphi') \sin\theta'}_{\delta_{pl}\delta_{qm}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \underbrace{\int_0^R dr' (r')^{l+2} f_{lm}(r')}_{q_{lm}} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow A^0(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

h)

$$\rho(r,\vartheta,\varphi)=\rho_0(r)$$

?

Sind $\rho(\vec{r}\,')$ und $f_{lm}(r')$ nicht rekursiv definiert? ?

$$A^0(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

du brauchst für die Aufgabe aber ja nur ρ oder f. ρ benutzt & kennst bro. kannst aus beiden Q bestimmen

$$f_{lm}(r')=\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}d\vartheta'\,\sin\vartheta'\,\overline{Y_{lm}(\vartheta',\varphi')}\,\rho_0(r')$$

$$=\rho_0(r')\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}d\vartheta'\,\sin\vartheta'\,\overline{Y_{lm}(\vartheta',\varphi')}\sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{4\pi}}}$$

$$=\sqrt{4\pi}\,\rho_0(r')\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\pi}d\vartheta'\,\sin\vartheta'\,\overline{Y_{lm}(\vartheta',\varphi')}\,Y_{00}(\vartheta',\varphi')$$

$$=\sqrt{4\pi}\,\rho_0(r')\,\delta_{l0}\,\delta_{m0}$$

Mit $q_{lm}=\int_0^{R}dr'\,(r')^{l+2}f_{lm}(r')=\int_0^{R}dr'\,(r')^{l+2}\sqrt{4\pi}\,\rho_0(r')\,\delta_{l0}\,\delta_{m0}$

hat nur der Term mit $l=0$ und $m=0$ einen Beitrag, alle anderen verschwinden.

$$\Rightarrow A^0(r,\vartheta,\varphi)=\phi_0(r)=\frac{4\pi}{1}q_{00}\frac{1}{r^1}Y_{00}(\vartheta,\varphi)$$

$$=\sqrt{4\pi}\cdot\frac{1}{r}\int_0^{R}dr'\,(r')^2\sqrt{4\pi}\,\rho_0(r')$$

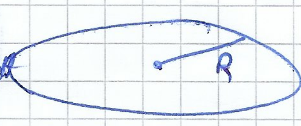
$$=\frac{4\pi\int_0^{R}dr'\,(r')^2\rho_0(r')}{r}=\frac{Q}{r},\quad Q=4\pi\int_0^{R}dr'\,(r')^2\rho_0(r')$$

✓

$\Rightarrow$ Potential ist sphärisch symm.

i) $\rho(r,\vartheta,\varphi)=N\,\delta(r-R)\,\delta(\vartheta-\pi/2)$ z.z. $N=\frac{Q}{2\pi R^2}$

$$Q\overset{!}{=}\int_V\rho\,dV=\iiint N\,\delta(r-R)\,\delta(\vartheta-\tfrac{\pi}{2})\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$



$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\,R^2\sin(\pi/2)\,N$$

$$=2\pi R^2 N \Leftrightarrow N=\frac{Q}{2\pi R^2}$$

✓

$$A^0 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$ g) anwendbar da $r > R$

$$q_{lm} = \int_0^{R} dr' \, f_{lm}(r') (r')^{l+2} = \int_0^{R} dr' (r')^{l+2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \, \overline{Y_{lm}}(\vartheta',\varphi') \, N\delta(r'-R)\delta(\vartheta'-\pi/2)$$

$$= N R^{l+2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \overline{Y_{lm}}(\pi/2,\varphi') = N R^{l+2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \, N_{lm} P_l^m(0) \, e^{-im\varphi'}$$

$$= N R^{l+2} N_{lm} P_l^m(0) \int_0^{2\pi} d\varphi' \, e^{-im\varphi'}$$

, m ganzzahlig, falls $m \neq 0$ wird über eine ganze Periode integriert $\Rightarrow$ Beitrag verschwindet

$$\Rightarrow q_{lm} = N R^{l+2} N_{lm} P_l^m(0) \, 2\pi \, \delta_{m0}$$

$$\Rightarrow A^0(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \cdot N R^{l+2} N_{lm} P_l^m(0) \, 2\pi \, \delta_{m0}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{l0}(\vartheta,\varphi) \cdot N \cdot R^{l+2} N_{l0} P_l^0(0) \, 2\pi$$

? Wo liegt unser Koordinatensystem? Von wo schaue ich also für $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \pi/4$ z.B?!

$$= 2\pi N R^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{R^l}{r^{l+1}} N_{l0}^2 P_l^0(\cos\vartheta) \cdot P_l^0(0)$$?

$$= \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^l N_{l0}^2 \underline{P_l^0(0)} \, P_l^0(\cos\vartheta)$$

← d.h. nur gerade Exp. tragen bei ($l = 2k$)

$$= \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^l N_{l,0}^2 P_l(\cos\vartheta) \frac{1+(-1)^l}{2} (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)! \left(\frac{l}{2}\right)!}$$

$$= \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta) \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2l+1}{4\pi} \frac{l!}{l!} \cdot \frac{1+(-1)^l}{2} (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)! \left(\frac{l}{2}\right)!}$$

$$= \frac{Q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta) \frac{1+(-1)^l}{2} (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)! \left(\frac{l}{2}\right)!}$$

fertig?! konvergiert das überhaupt...

mit $l = 2k$

$$\frac{Q}{r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{R}{2r}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} P_{2k}(z)$$

dann halt Fallunterscheidung, das gilt f. $r > R$