Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik Blatt 11 Marvin Zanke

H12)

a) Dazu stellt man zuerst fest, dass $\vec{E}$ folgende Form annehmen soll:

$$E^i(\vec{x},t) \overset{!}{=} \frac{q}{\left(1-\left(\frac{\vec{y}}{R}\cdot\vec{\beta}\right)\right)^3}\left\{\frac{1-\frac{1}{c^2}\dot{\vec{z}}^2(t_r')}{R^2}\left(\frac{y^i}{R}-\beta^i\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{cR}\left[(n^i-\beta^i)(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})-(1-(\vec{n}\cdot\vec{\beta}))\dot{\beta}^i\right]\right\} \qquad (*)$$

wobei $\dot{\vec{z}}(t_r')=\frac{dz}{dt'}(t_r')$, $\vec{\beta}=\frac{1}{c}\dot{\vec{z}}(t_r')$, $\dot{\vec{\beta}}=\frac{1}{c}\ddot{\vec{z}}(t_r')$

$\vec{y}=\vec{x}-\vec{z}(t_r')$, $R=|\vec{y}|$, $\vec{n}=\frac{\vec{y}}{R}$

ok

und wir benutzen:

?

Müssen die Indizes bei 2-fachem Kreuzprodukt nun oben stehen? Falls unten kommt genau das Negative raus?

Da du hier im $\mathbb{R}^3$ arbeitest ist das irrelevant! Normales Skalarprodukt!

$$[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}]]^i=\epsilon_{ijk}n^j\epsilon_{klm}(n^l-\beta^l)\dot{\beta}^m$$

$$=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}n^jn^l\dot{\beta}^m-\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}n^j\beta^l\dot{\beta}^m$$

$$=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\{n^jn^l\dot{\beta}^m-n^j\beta^l\dot{\beta}^m\}$$

$$=\{n^in^j\dot{\beta}^j-n^j\beta^i\dot{\beta}^j\}-\{n^jn^j\dot{\beta}^i-n^j\beta^j\dot{\beta}^i\}$$

$$=[n^i(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})]-[\beta^i(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})]-[\dot{\beta}^i(\vec{n}\cdot\vec{n})]+[\dot{\beta}^i(\vec{n}\cdot\vec{\beta})]$$

$$=(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(n^i-\beta^i)-\dot{\beta}^i(1-(\vec{n}\cdot\vec{\beta}))$$

✓

Nun löst man $(*)$ weiter auf und erhält:

$$E^i(\vec{x},t)\overset{!}{=}\frac{qR^3}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3}\left\{\frac{1}{R^3}\left[\left(1-\frac{|\dot{\vec{z}}|^2}{c^2}\right)(y^i-R\beta^i)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{cR^3}\left[\left(\frac{y^i}{R}-\beta^i\right)\left(\frac{\vec{y}}{R}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)-(1-(\vec{n}\cdot\vec{\beta}))\dot{\beta}^i\right]\right\}$$

$$=\frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3}\left\{\left(1-\frac{|\dot{\vec{z}}|^2}{c^2}\right)(y^i-R\beta^i)\right.$$

$$\left.+\frac{R}{c}\left[\left(\frac{y^i}{R}-\beta^i\right)(\vec{y}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\left(1-\left(\frac{\vec{y}}{R}\cdot\vec{\beta}\right)\right)R\dot{\beta}^i\right]\right\}$$

$$=\frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3}\left\{\left(1-\frac{|\dot{\vec{z}}|^2}{c^2}\right)(y^i-R\beta^i)\right.$$

$$\left.+\frac{y^i}{c}(\vec{y}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\frac{R}{c}\beta^i(\vec{y}\cdot\dot{\vec{\beta}})-\frac{R}{c}(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))\dot{\beta}^i\right\}$$

$(***)$

Nun rechnen wir noch die Komponente E^i aus!

$$E^i = F_{0i} = \frac{q}{\eta(\underline{k}(\sigma_r), \dot{\underline{z}}')^3}\left(k_0(\sigma_r)\, w_i(\sigma_r) - k_i(\sigma_r)\, w_0(\sigma_r)\right) \qquad (**)$$

Wir benutzen die Parametrisierung $\sigma = ct'$, $\underline{z}(\sigma) = (ct', \vec{z}(t'))$

Es gilt: $k^0(\sigma_r) = |\vec{k}(\sigma_r)| \iff x^0 - z^0(\sigma_r) = |\vec{x} - \vec{z}(\sigma_r)|$

$$\iff ct_r - ct'_r = |\vec{x} - \vec{z}(\sigma_r)|$$

$$\iff t'_r = t_r - \frac{|\vec{x} - \vec{z}(\sigma_r)|}{c}$$

Außerdem bemerkt man dann:

$$\eta(\underline{k}(\sigma_r), \dot{\underline{z}}') = k^0(\sigma_r)\, \dot{z}^{0\prime} - \vec{k} \cdot \dot{\vec{z}}' \qquad (*)$$

und $\frac{d\underline{z}}{d\sigma} = \frac{d\underline{z}}{dt'} \cdot \frac{dt'}{d\sigma} = \frac{d\underline{z}}{dt'} \frac{1}{c}$, denn $\frac{d\sigma}{dt'} = c$

$$\Rightarrow (*) = |\vec{k}(\sigma_r)| - \vec{k} \cdot \dot{\vec{z}} \cdot \frac{1}{c} = \underline{\underline{R - \vec{y} \cdot \vec{\beta}}}$$

mit $\vec{k}(\sigma_r) \hat{=} \vec{y} = \vec{x} - \vec{z}(t_r)$ bei unserer Parametrisierung

und $R = |\vec{y}|$, $\vec{\beta}$ wie gehabt.

Außerdem stellt man fest, dass:

$$\underline{w}(\sigma_r) = \underline{u}(\sigma_r) + \underline{v}(\sigma_r) = \frac{1}{c^3}\Big\{ \eta(\ddot{\underline{z}}(t'_r), \dot{\underline{z}}(t'_r))\, \dot{\underline{z}}(t'_r)$$
$$+ \eta(\underline{y}, \dot{\underline{z}}(t'_r))\, \ddot{\underline{z}}(t'_r)$$
$$- \eta(\underline{y}, \ddot{\underline{z}}(t'_r))\, \dot{\underline{z}}(t'_r) \Big\}$$

wobei $\underline{y} = (|\vec{y}|, \vec{y}) = (R, \vec{y})$

(1) Außerdem gilt $\ddot{\underline{z}}(t'_r) = (0, \ddot{\vec{z}}(t'_r))$, $\dot{\underline{z}}(t'_r) = (c, \dot{\vec{z}}(t'_r))$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{c^3}\Big\{ (\dot{z}^{0\,2} - |\dot{\vec{z}}|^2)\, \ddot{\underline{z}}(t'_r) + (R\dot{z}^0 - \vec{y} \cdot \dot{\vec{z}}(t'_r))\, \ddot{\underline{z}}(t_r)$$
$$- (R\ddot{z}^0 - \vec{y} \cdot \ddot{\vec{z}}(t'_r))\, \dot{\underline{z}}(t'_r) \Big\}$$

$$= \frac{1}{c^3}\Big\{ (c^2 - |\dot{\vec{z}}|^2)\, \ddot{\underline{z}}(t'_r) + (Rc - (\vec{y} \cdot \dot{\vec{z}}(t'_r)))\, \ddot{\underline{z}}(t'_r)$$
$$+ (\vec{y} \cdot \ddot{\vec{z}}(t'_r))\, \dot{\underline{z}}(t'_r) \Big\}$$

Insbesondere folgt damit für w_0 und w_i:

$$w_0 = \frac{1}{c^3}\left\{ c^2\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right)\dot z(t_r') + c\left(R-(\vec y\cdot\vec\beta)\right)\ddot z^0(t_r') + c\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\dot z(t_r')\right\}$$

$$= \left\{\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c}\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\right\}$$

$$w_i = \frac{1}{c^3}\left\{ c^2\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right)\dot z_i(t_r') + c\left(R-(\vec y\cdot\vec\beta)\right)\ddot z_i(t_r') + c\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\dot z_i(t_r')\right\}$$

$$= \left\{\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right)\beta_i + \frac{1}{c}\dot\beta_i\left(R-(\vec y\cdot\vec\beta)\right) + \frac{1}{c}\beta_i\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\right\}$$

Alles zusammen:

$$\Longrightarrow (**) = E^i = \frac{q}{(R-\vec y\cdot\vec\beta)^3}\left\{w^0 k^i - k^0 w^i\right\}$$

$w^i = -w_i$

$$= \frac{q}{(R-(\vec y\cdot\vec\beta))^3}\left\{ y^i\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c}y^i\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right) - R\left[\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right)\beta^i + \frac{1}{c}\dot\beta^i\left(R-(\vec y\cdot\vec\beta)\right) + \frac{1}{c}\beta^i\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{q}{(R-(\vec y\cdot\vec\beta))^3}\left\{\left(1-\frac{|\dot{\vec z}|^2}{c^2}\right)\left(y^i - R\beta^i\right) + \frac{y^i}{c}\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right) - \frac{R}{c}\dot\beta^i\left(R-(\vec y\cdot\vec\beta)\right) - \frac{R}{c}\beta^i\left(\vec y\cdot\dot{\vec\beta}\right)\right\}$$

? Offenbar liefert dieser Term Gleichheit mit $(***)$! ■

✓ ok

Reicht es nicht auch, das ohne konkrete Parametrisierung zu zeigen? ?

Nun wollen wir zeigen, dass auch in dieser Parametrisierung gilt:

$$\vec B \overset{!}{=} \left(\vec n\times\vec E\right)$$

Der Ausdruck gilt nur explizit in dem Bezugssystem siehe [1] z.B.

$$\Longrightarrow B^i \overset{!}{=} \epsilon_{ijk} n^j E^k = \epsilon_{ijk} n^j F_{k0} = \epsilon_{ijk} n^j \overbrace{\frac{q}{(R-(\vec y\cdot\vec\beta))^3}}^{=:\tilde C}\left(k_0\tilde w_k - k_k\tilde w_0\right)$$

$$= \tilde C\left(k^k\tilde w^0 - k^0\tilde w_k\right)n^j\epsilon_{ijk} = \tilde C\left\{\tilde w^0\underbrace{(\vec n\times\vec k)^i}_{=0,\text{ weil } \vec n = \frac{\vec y}{R},\ \vec k = \vec y \text{ in dieser Parametrisierung}} - k^0(\vec n\times\tilde{\vec w})^i\right\}$$

mit $\tilde w = \frac{1}{c^3}\left\{\eta(\dot z,\dot z)\dot z + \eta(y,\dot z)\ddot z - \eta(y,\ddot z)\dot z\right\}$

$$\Rightarrow B^i = -\tilde{C}\, k^0 (\vec{n} \times \vec{\tilde{w}})^i \cancel{-} + \tilde{C}\, R \left(\vec{\tilde{w}} \times \frac{\vec{y}}{R}\right)^i$$
$$= \tilde{C} (\vec{\tilde{w}} \times \vec{y})^i$$

Nun gilt auch für B:

$$B^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3} (k_j \tilde{w}_k - k_k \tilde{w}_j)$$

$$= \frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3} \frac{1}{2} \left\{ (\vec{\tilde{w}} \times \vec{k})^i - (\vec{k} \times \vec{\tilde{w}})^i \right\}$$

$$= \frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3} (\vec{\tilde{w}} \times \vec{y})^i \quad , \text{da } \vec{k}(\sigma_r) \mathrel{\hat{=}} \vec{y} \text{ in der Parametrisierung von uns.}$$

Da $\tilde{C} = \frac{q}{(R-(\vec{y}\cdot\vec{\beta}))^3}$ gewählt war, gilt die Behauptung! ▯

Es ist meistens schwieriger von der komplexeren Formel auf die einfache zu kommen als umgekehrt.

D.h. mit $E^i = -F^{0i}$ angefangen wäre es simpler gewesen

b) Wählt man nun konkret für einen Spezialfall:

$$\vec{z}_1(t') = \frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t'), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3 = \text{const},$$

und nutzt die Langwellennäherung: $|\vec{\beta}_1| \leq \frac{|\vec{a}|\omega}{2c} << 1$,

d.h. $\underbrace{\frac{|\vec{a}|}{2}}_{\text{Amplitude}} << \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$, so folgt erst einmal:

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c}\frac{dz}{dt'}(t'_r) = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{2}\vec{a}\cos(\omega t'_r)\omega\right] = \frac{\omega}{2c}\vec{a}\cos(\omega t'_r)$$

$$\dot{\vec{\beta}} = -\frac{\omega^2}{2c}\vec{a}\sin(\omega t'_r)$$ ok

(*)

Damit kann man das Ergebnis aus a) nun stark vereinfachen!

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{q}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\left(\frac{1-|\vec{\beta}|^2}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{1}{cR}\left[\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]\right]\right)$$

es gilt: $|(\vec{n}\cdot\vec{\beta})| = |\vec{n}||\vec{\beta}||\cos(\measuredangle\,\vec{n},\vec{\beta})| \leq 1\cdot|\vec{\beta}| << 1$

$|\vec{\beta}|^2 = |\vec{\beta}||\vec{\beta}| << 1$

$$\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right] = (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}\left[\vec{n}\cdot(\vec{n}-\vec{\beta})\right]$$
$$= (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}|\vec{n}|^2 + \underbrace{\dot{\vec{\beta}}(\vec{n}\cdot\vec{\beta})}_{\dot{\vec{\beta}}\,\underbrace{|\vec{n}|\cdot|\vec{\beta}|\cos(\vec{n},\vec{\beta})}_{<<1}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(\vec{x},t)}} = q\left\{\frac{1}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{1}{cR}\left[\vec{n}\times\left[(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) - \underbrace{(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})}_{0,\ \text{da}\ \vec{a}\,\|\,\vec{a}}\right]\right]\right\}$$

$$= q\left\{\frac{1}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{1}{cR}\left[\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}})\right]\right\}$$ $\dot{\vec{\beta}}$ einsetzen! (*)

d.h. vernachlässigbar gegenüber $\vec{n}$

Hiermit rechnen wir gleich weiter, es gilt allerdings auch noch: $\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}) = \vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(\vec{n}\cdot\vec{n})$ (✓)

warum das wieder entflechten wenn es so schön kompakt ist!

und damit:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = q\left\{\frac{1}{R^2}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{1}{cR}\left[\vec{n}(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}\right]\right\}$$

c) Nun betrachten wir 2 harmonisch schwingende Ladungen:

$$q_1 = q, \quad \vec{z}_1(t') = \frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t')$$
$$q_2 = -q, \quad \vec{z}_2(t') = -\frac{1}{2}\vec{a}\sin(\omega t')$$

Das E-Feld entsteht dabei aus Superposition: $\vec{E}(\vec{x},t) = E_1(\vec{x},t) + E_2(\vec{x},t)$

Aus der vorherigen Aufgabe kennen wir außerdem die Form der E-Felds

$$\Rightarrow \vec{E}(x,t) = q\left\{\frac{1}{R_1^2}(\vec{n}_1 - \vec{\beta}_1) + \frac{1}{cR_1}\left[\vec{n}_1 \times [\vec{n}_1 \times \dot{\vec{\beta}}_1]\right]\right\}$$
$$-q\left\{\frac{1}{R_2^2}(\vec{n}_2 - \vec{\beta}_2) + \frac{1}{cR_2}\left[\vec{n}_2 \times [\vec{n}_2 \times \dot{\vec{\beta}}_2]\right]\right\}$$

wobei vernachlässigbar

Nun betrachten wir die gegebenen Taylor-Entwicklungen.
Für das Fernfeld dominiert $|\vec{x}|$ dabei gegen alles. Die Taylorentwicklungen vereinfachen sich also folgendermaßen:

$$\vec{n}_{1/2} \approx \vec{n}, \quad \text{denn} \quad \frac{\vec{a}}{|\vec{x}|} \to \vec{0}$$

$|\vec{a}| \ll \lambda \ll |\vec{x}|$
$$\frac{1}{R_{1/2}^2} \approx \frac{1}{|\vec{x}|^2}, \quad \text{denn} \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{x}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{n}|\cos(\sphericalangle \vec{a},\vec{n})}{|\vec{x}|} \leq \frac{|\vec{a}|}{|\vec{x}|} \ll 1$$

$$\frac{1}{cR_{1/2}} \approx \frac{1}{c|\vec{x}|}, \quad \text{gleiches Argument mit } \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{x}|}$$

Das sind nur Ote bzw. 1. Ordnung in der Entwicklung!

Damit folgt insgesamt für das Fernfeld:

$$\vec{E}(\vec{x},t) \approx q\left\{\frac{1}{|\vec{x}|^2}(\vec{n} - \cancel{\vec{\beta}_1}) + \frac{1}{c|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}_1]\right]\right\}$$
$$-q\left\{\frac{1}{|\vec{x}|^2}(\vec{n} - \cancel{\vec{\beta}_2}) + \frac{1}{c|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}_2]\right]\right\} + \ldots$$

vernachlässigbar

$$= \frac{q}{|\vec{x}|^2}\left\{\cancel{(\vec{\beta}_2 - \vec{\beta}_1)}\right\} + \frac{q}{c|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times [\vec{n} \times (\dot{\vec{\beta}}_1 - \dot{\vec{\beta}}_2)]\right]$$

$$= -\frac{\omega}{c}\vec{a}\cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\cdot\frac{q}{|\vec{x}|^2} + \frac{q}{c|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \left(-\frac{\omega^2}{c}\vec{a}\sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\right)\right]\right]$$

$$= -\frac{q}{|\vec{x}|^2}\frac{\omega}{c}\vec{a}\cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) - \frac{q\omega^2}{c^2|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \vec{a}\sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\right]\right]$$

$$= -\frac{q}{|\vec{x}|^2}\frac{\omega}{c}\vec{a}\cos\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) + \frac{1}{c^2|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]\right]$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ich schätze mal, ich habe hier was falsch gemacht?! Die Nahzone und Fernzone ergeben das gleiche oder wo benutze ich $\lambda \gg |\vec{x}|$ in der Nahzonen Rechnung?

$$\text{mit } \vec{d}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) = q\vec{a}\sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

Der erste Term ist für große $|\vec{x}|$ und λ zu vernachlässigen

$$\Longrightarrow \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2|\vec{x}|}\left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]\right]$$

Da aber es fehlen oben

Nahfeld: 2

d)

Hier benutzen wir selbstverständlich das Fernfeld!

$$(*)\quad \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2|\vec{x}|}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]\right]$$

$$\vec{d} = q\vec{a}\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \Rightarrow \ddot{\vec{d}} = -q\omega^2\vec{a}\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c^2|\vec{x}|}q\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\vec{a}\right]\right]$$

richtig!

$$= -\frac{1}{c^2|\vec{x}|}q\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\left\{\vec{n}\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{a})}_{=|\vec{n}||\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{n},\vec{a})\le|\vec{a}|}-\cancel{\vec{a}}\right\}$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{q}{c^2}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\omega^2\vec{a}\right]\right]$$

$$\boxed{\frac{|\vec{a}|}{|\vec{x}|}\ll 1} = \frac{1}{c^2|\vec{x}|}q\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\vec{a}$$

?

$\vec{x}\perp\vec{E}$ gilt exakt nicht mehr nach Näherung. Lieber (*) benutzen oben?

$$= \frac{1}{|\vec{x}|}\vec{E}_0\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right) \quad \text{mit } \vec{E}_0 = \frac{q\omega^2}{c^2}\vec{a} = qk^2\vec{a}$$

Nun gilt: $\vec{E}\cdot\vec{x} = \sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\frac{1}{|\vec{x}|}\frac{q\omega^2}{c^2}(\vec{a}\cdot\vec{x})$

$$= \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)}{|\vec{x}|}\frac{q\omega^2}{c^2}|\vec{a}||\vec{x}|\cos(\vec{a},\vec{x})$$

$$\boxed{\text{Langwellennäherung } \frac{|\vec{a}|\omega}{2c}\ll 1} \ll \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)}{|\vec{x}|}\frac{q\omega^2}{c^2}\frac{2c}{\omega}|\vec{x}|\cos(\vec{a},\vec{x})$$

$$= 2\sin\left(\omega\left(t-\frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)\frac{q\omega}{c}\cos(\vec{a},\vec{x}) \le \frac{2q\omega}{c} = 2qk$$

$$= 2q\frac{2\pi}{\lambda} \ll 1 \quad \text{und damit } \vec{E}\perp\vec{x}$$

Da $\vec{B} = (\vec{n}\times\vec{E}) \Rightarrow \cancel{\vec{B}\cdot\vec{x} = (\vec{n}\times\vec{E})\cdot\vec{x} = \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\times\vec{E}\right)\cdot\vec{x}} = 0$ da $\vec{x}\perp$ auf Vektor senkrecht zu $\vec{x}$.

$\vec{E}\perp\vec{B}$

sorry

$\vec{E}\cdot\vec{B} = \vec{E}\cdot(\vec{n}\times\vec{E}) = 0$ aus gleichem Argument!

$$|\vec{B}|^2 = |\vec{n}\times\vec{E}|^2 = |\vec{n}|^2|\vec{E}|^2\sin(\measuredangle\vec{n},\vec{E}) = |\vec{E}|^2\sin(\measuredangle\vec{n},\vec{E})$$

Da $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ und $\vec{x}\perp\vec{E}$, ist der Winkel zwischen $\vec{n},\vec{E}$: $90°$

$$\Rightarrow |\vec{B}|^2 = |\vec{E}|^2 \Leftrightarrow |\vec{B}| = |\vec{E}|$$

ok

e) $\vec S = \frac{c}{4\pi}[\vec E \times \vec B]$ nach Def. bzw. Äquivalenz bereits gezeigt!

$$= \frac{c}{4\pi}[\vec E \times (\vec n \times \vec E)] = \frac{c}{4\pi}\left\{\vec n(\vec E\cdot\vec E) - \vec E \underbrace{(\vec n\cdot\vec E)}_{=\frac{\vec x}{|\vec x|}\cdot\vec E = 0}\right\}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\vec n |\vec E|^2$$

$$|\vec E|^2 = \frac{1}{|\vec x|^2 c^4}\left|\vec n \times \left(\vec n \times \ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{c^4|\vec x|^2}|\vec n|^2\left|\vec n\times \ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\right|^2 \underbrace{\sin^2(\sphericalangle \vec n, (\vec n\times\ddot{\vec d}))}_{1,\ \text{weil}\ \vec n\perp(\vec n\times\ddot{\vec d})}$$

$$= \frac{1}{c^4|\vec x|^2}\left|\vec n\times\ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\right|^2$$

$$\Rightarrow \vec S = \frac{c}{4\pi}\vec n|\vec E|^2 = \vec n\, \frac{1}{4\pi c^3|\vec x|^2}\left|\vec n \times \ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\right|^2$$

$$= \frac{\left|\ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\times\vec n\right|^2}{4\pi c^3|\vec x|^2}\,\vec n$$

f) $$\mathcal{E} = \frac{1}{T}\int_0^T dt \underbrace{\int_{F_K} d\vec f\cdot\vec S(\vec x,t)}_{(*)}$$

Dazu betrachten wir zuerst (*):

$$\int_{F_K} d\vec f\cdot\vec n\, \frac{\left|\ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\times\vec n\right|^2}{4\pi c^3|\vec x|^2}$$

Wir benutzen Kugelkoordinaten. Damit folgt:

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta\, d\varphi\, R^2\sin\vartheta\, \frac{R\vec x_0\cdot\vec x_0}{|R\vec x_0|}\left|\ddot{\vec d}\left(t-\frac{\vec x}{c}\right)\times\frac{R\vec x_0}{|R\vec x_0|}\right|^2\frac{1}{|R\vec x_0|^2}$$

$$\left(\text{mit } \vec x = R\vec x_0 = R\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta\, d\varphi\, \sin\vartheta \left|\ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\times\vec x_0\right|^2$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta\, d\varphi\, \sin\vartheta \left|\ddot{\vec d}\left(t-\frac{|\vec x|}{c}\right)\right|^2 \underbrace{\sin^2(\sphericalangle \ddot{\vec d}, \vec x_0)}_{=\ [illegible]}$$

?

Darf man das mit der Drehung hier so machen?

Jo!

$$= \frac{1}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\vartheta\, d\varphi\, \sin^3\vartheta \left|\ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2$$

$$\int_0^{\pi} d\theta\, \sin^3\theta = \int_{-1}^{1} (1 - \cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = \frac{4}{3} \;!!!$$

Wolfram Alpha $\leftarrow$ also ehrlich!

$$\overset{\text{Wolfram Alpha}}{=} \frac{4}{3} \cdot 2\pi \frac{1}{4\pi c^3} \left|\ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2 = \frac{2}{3c^3} \left|\ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2$$

nix Mathematica!

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{2}{3c^3 T} \int_0^T dt \left|\ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2 \qquad \blacksquare \quad \checkmark$$

Nun Spezialfall: $\vec{d}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) = \vec{d}_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) = -\vec{d}_0 \omega^2 \sin\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left|\ddot{\vec{d}}\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right|^2 = \omega^4 |\vec{d}_0|^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{2\omega^4 |\vec{d}_0|^2}{3c^3 T} \int_0^{T} dt\, \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{2\omega^4 |\vec{d}_0|^2 \cdot \omega}{3c^3 \cdot 2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt\, \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right)}_{(*)}$$

$(*)$ $\omega t = x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \omega \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{\omega}$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} dx\, \sin^2\left(x - \underbrace{\omega \frac{|\vec{x}|}{c}}_{\text{const}}\right)$$

$\leftarrow$ das sollte auch so gerechnet werden können! Auch in der Klausur!

$$\overset{\text{Wolfram Alpha}}{=} \frac{1}{\omega} \pi$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{2\omega^4 |\vec{d}_0|^2}{3c^3 2\pi} \pi = \frac{\omega^4 |\vec{d}_0|^2}{3c^3} = \frac{k^4 c\, |\vec{d}_0|^2}{3}$$

$$= \frac{(2\pi/\lambda)^4 c\, |\vec{d}_0|^2}{3} = \frac{16\pi^4 c}{3\lambda^4} |\vec{d}_0|^2 \qquad \blacksquare$$