Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 12 Marvin Zanke

H13

$\vec{E} = E\vec{e}_1$, $\underline{z}(s) = z^0(s)\,\underline{e}_0 + z^1(s)\,\underline{e}_1$

$\eta(\underline{z}'(s), \underline{z}'(s)) = 1$

a) $\underline{z}'(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi(s)) \\ \sinh(\phi(s)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ löst A.L.G.

$$(*)\quad \boxed{mc^2 z''^\mu(s) = q F^\mu_{\ \nu} z'^\nu(s) + \frac{2}{3}q^2\left(z'''^\mu(s) + \eta(z''(s), z''(s))\, z'^\mu(s)\right)}$$

$$\underline{z}''(s) = \begin{pmatrix} \sinh(\phi(s))\cdot\phi'(s) \\ \cosh(\phi(s))\,\phi'(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi'(s)\,\underline{k}(s)$$

mit $\underline{k}(s) = \begin{pmatrix} \sinh(\phi(s)) \\ \cosh(\phi(s)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\eta(\underline{k}(s), \underline{k}(s)) = \sinh^2(s) - \cosh^2(s)$
$= -1$

$$z'''(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi(s))(\phi'(s))^2 + \sinh(\phi(s))\,\phi''(s) \\ \sinh(\phi(s))(\phi'(s))^2 + \cosh(\phi(s))\,\phi''(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \phi'(s)\,\underline{z}'(s) + \phi''(s)\,\underline{k}(s)$$

? $\eta(\underline{z}''(s), \underline{z}''(s)) = (\phi'(s))^2\left\{\sinh^2(s) - \cosh^2(s)\right\} = -(\phi'(s))^2$

Komponentenweise oder als Vektor in Ordnung?

$\rightarrow (*) \Leftrightarrow mc^2\underline{z}''(s) = qE\underline{k}(s) + \frac{2}{3}q^2\left\{(\phi'(s))^2\underline{z}'(s) + \phi''(s)\underline{k}(s) - (\phi'(s))^2\underline{z}'(s)\right\}\ (*)$

so schöner :) denn $F^\mu_{\ \nu} z'^\nu = \eta^{\mu\kappa} F_{\kappa\nu} z'^\nu$ und nur $F_{01} = E = -F_{10}$

$= \epsilon_\mu F_{\mu\nu} z'^\nu = \eta(F\underline{z}') = \begin{pmatrix} E\sinh(\phi(s)) \\ -(-E\cosh(\phi(s))) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E\underline{k}(s)$

$(*) \Leftrightarrow mc^2\phi'(s)\underline{k}(s) = qE\underline{k}(s) + \frac{2}{3}q^2\phi''(s)\underline{k}(s)$

Multipliziert man die Gleichung von links mit $k(s)$, so ergibt sich:

$$-mc^2 \phi'(s) = -qE - \frac{2}{3}q^2 \phi''(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad mc^2 \phi'(s) = qE + \frac{2}{3}q^2 \phi''(s) \quad \square$$

Recht und Komponentenweise ablesen am $k(s)_2$?

b) Zuerst lösen wir den homogenen Fall / inhomogen

$$\frac{2}{3}q^2 \phi''(s) - mc^2 \phi'(s) = 0 \qquad (*) \quad \frac{2}{3}q^2 \phi''(s) - mc^2 \phi'(s) + qE = 0$$

Ansatz: $\phi(s) = Ae^{\lambda s} \Rightarrow \phi'(s) = A\lambda e^{\lambda s} = \lambda \phi(s)$

$$\phi''(s) = A\lambda^2 e^{\lambda s} = \lambda^2 \phi(s)$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2}{3}q^2 \lambda^2 \phi(s) - mc^2 \lambda \phi(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}q^2 \lambda = mc^2$$ „denn $\lambda \neq 0$ sicherlich, sonst triviale, konstante Lösung und $\phi(s) \neq 0$ (e-dot.)"

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3mc^2}{2q^2}$$

?

$$\Rightarrow \phi(s) = Ae^{\frac{3mc^2}{2q^2}s}, \quad A \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Wie kommt man auf spez. Lsg., ohne das Ergebnis bereits zu kennen?

Nun zeigen wir, dass $f(s) = \frac{qE}{mc^2}s + B$ eine spezielle Lösung der inhom.! DGL darstellt.

$$f'(s) = \frac{qE}{mc^2}, \quad f''(s) = 0$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \frac{2}{3}q^2 f''(s) - mc^2 \frac{qE}{mc^2} + qE \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftarrow -qE + qE \overset{!}{=} 0 \quad \text{Offensichtlich erfüllt.}$$

$$\Rightarrow \phi(s) = Ae^{\frac{3mc^2}{2q^2}s} + \frac{qE}{mc^2}s + B \text{ löst die DGL.} \square$$

$$\frac{v}{c} = \frac{dz^1}{dz^0} = \underbrace{\frac{dz^1}{ds}}_{\sinh(\phi(s))} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dz^0}}_{\frac{1}{\cosh(\phi(s))}} = \frac{\sinh(\phi(s))}{\cosh(\phi(s))} = \tanh(\phi(s))$$

$$\frac{a}{c^2} = \frac{d^2 z^1}{d(z^0)^2} = \frac{d}{dz^0}\frac{dz^1}{dz^0} = \frac{d}{dz^0}\left\{\tanh(\phi(s))\right\}$$

$$= \frac{d}{ds}\tanh(\phi(s)) \cdot \underbrace{\frac{ds}{dz^0}}_{} \leftarrow \frac{1}{\cosh(\phi(s))}$$

$$= \frac{\cosh^2(\phi(s)) - \sinh^2(\phi(s))\,\phi'}{\cosh^2(\phi(s))} \cdot \frac{1}{\cosh(\phi(s))}$$

$$= \frac{\phi'}{\cosh^3(\phi(s))}$$

$\Rightarrow$ Anfangsgeschwindigkeit $\frac{v_0}{c} = \tanh(\phi(0))$

Anfangsbeschleunigung: $\frac{a_0}{c^2} = \frac{\phi'}{\cosh^3(\phi(0))}$

$$\Rightarrow \frac{v_0}{c} = \tanh(A+B) \quad \text{mit } \phi(0) = A\cdot e^0 + B$$

$$\frac{a_0}{c^2} = \frac{1}{\cosh^3(A+B)}$$

Hat das Teilchen keine Anfangsgeschwindigkeit, so muss gelten

$$\tanh(A+B) \overset{!}{=} 0 \iff A = -B$$

$$\Longrightarrow \frac{a_0}{c^2} = 1 \iff a_0 = c^2$$

ϕ' oben vergessen!

?

$$\Rightarrow \phi(s) = A e^{\frac{3mc^2}{2q^2}s} + \frac{qE}{mc^2}s - A$$

$$= A\left\{e^{\frac{3mc^2}{2q^2}s} - 1\right\} + \frac{qE}{mc^2}s$$

War das jetzt so richtig mit dem $\frac{v}{c} \to 1$ wie du in der Übung meintest?

Da das Teilchen durch das E-Feld dann allenfalls beschleunigt wird, muss $\phi'(s) > 0$ gelten, damit $\tanh(\phi(s))$ monoton wachsend ist, die Geschwindigkeit also größer wird. Damit muss $A \in \mathbb{R}, A > 0$ gelten. Dadurch dass $a_0 = c^2$ gilt wird das Teilchen immer etwas beschleunigt und erreicht dann wegen $\tanh x \xrightarrow{x\to\infty} 1$ auf jeden Fall $\frac{v}{c} \to 1$ also Lichtgeschwindigkeit (fertig!)