Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

06.02.'16 Theoretische Physik II Blatt 14 Marvin Zanke

H15

a) Man stellt fest:
$$\vec\nabla\left(\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)=\frac{f_{\ell m}'(r)\frac{\vec x}{r}}{r^\ell}-\ell r^{-\ell-1}f_{\ell m}(r)\frac{\vec x}{|\vec x|}$$
$$=\left(\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}\right)\vec x$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)$$
$$=x_1\left\{\frac{f_{\ell m}''(r)\frac{x_1}{r}}{r^{\ell+1}}-(\ell+1)r^{-\ell-2}f_{\ell m}'(r)\frac{x_1}{r}-\ell\frac{f_{\ell m}'(r)\frac{x_1}{r}}{r^{\ell+2}}+\ell(\ell+2)\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+3}}\frac{x_1}{r}\right\}$$
$$+x_2\left\{\quad " \quad x_2 \quad " \quad x_2 \quad " \quad x_2\right\}$$
$$+x_3\left\{\quad\right\}$$
$$+3\left\{\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}\right\}$$
$$=\frac{f_{\ell m}''(r)}{r^\ell}-(\ell+1)\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}+\ell(\ell+2)\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}$$
$$+3\left\{\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}\right\}$$
$$=\frac{f_{\ell m}''(r)}{r^\ell}-2\ell\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}+2\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}+\ell^2\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}$$
$$=\frac{f_{\ell m}''(r)}{r^\ell}-(2\ell-2)\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}+\ell(\ell-1)\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}$$

Damit folgt sofort: $\Delta\left\{\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}y_{\ell m}(r,\vartheta,\varphi)\right\}=\vec\nabla\left\{\vec\nabla\left(\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)y_{\ell m}+\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\vec\nabla(y_{\ell m})\right\}$

$$=\Delta\left(\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)y_{\ell m}+2\vec\nabla\left(\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)\vec\nabla(y_{\ell m})+\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\underbrace{\Delta(y_{\ell m})}_{0,\text{ bereits gezeigt}}$$

$$=\left(\frac{f_{\ell m}''(r)}{r^\ell}-(2\ell-2)\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}+\ell(\ell-1)\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}\right)y_{\ell m}$$
$$+2\left(\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^{\ell+1}}-\ell\frac{f_{\ell m}(r)}{r^{\ell+2}}\right)\underbrace{\left(\vec x\cdot\vec\nabla(y_{\ell m})\right)}_{\ell y_{\ell m}}$$

$$=y_{\ell m}\left(\frac{f_{\ell m}''(r)}{r^\ell}+\frac{2}{r}\frac{f_{\ell m}'(r)}{r^\ell}-\frac{\ell^2}{r^2}\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}-\frac{\ell}{r^2}\frac{f_{\ell m}(r)}{r^\ell}\right)$$

$$= \frac{Y_{lm}}{r^2}\left\{ f_{lm}''(r) + \frac{2}{r} f_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(r) \right\}$$

$$= Y_{lm}\left\{ f_{lm}''(r) + \frac{2}{r} f_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(r) \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \Delta\left(\frac{f_{lm}(r)}{r^2} Y_{lm}(r, \theta, \varphi) \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \left\{ f_{lm}''(r) + \frac{2}{r} f_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(r) \right\}$$

$$0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, \overline{Y_{l'm'}} \, \Delta\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, \overline{Y_{l'm'}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm} \{ \ldots \}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \left\{ f_{lm}''(r) + \frac{2}{r} f_{lm}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(r) \right\}$$

$$= \underbrace{f_{l'm'}''(r) + \frac{2}{r} f_{l'm'}'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm}(r)}_{(*)} \quad \boxed{}$$

? Ich verstehe nicht, wieso jetzt die m-Abhängigkeit wegfällt. In der Vorlesung hieß es, dass „unabhängig m". Aber wieso?

b)

$$f_l(r) = r^l \Rightarrow f_l'(r) = l r^{l-1}, \quad f_l''(r) = l(l-1) r^{l-2}$$

$$\Rightarrow (*) = l(l-1) r^{l-2} + \frac{2}{r} l r^{l-1} - \frac{l(l+1)}{r^2} r^l$$

$$= l(l-1) r^{l-2} + 2l r^{l-2} - l(l+1) r^{l-2} = (l^2 - l^2) r^{l-2} + (2l - 2l) r^{l-2} = 0$$

? Wie führt das auf $\Phi_{lm} = r^l Y_{lm}$? $a_{lm} = 1$?

$$f_l(r) = r^{-l-1} \rightarrow f_l'(r) = -(l+1) r^{-l-2}, \quad f_l''(r) = (l+2)(l+1) r^{-l-3}$$

$$\Rightarrow (*) = r^{-l-3} (l+2)(l+1) - \frac{2}{r} (l+1) r^{-l-2} - \frac{l(l+1)}{r^2} r^{-l-1}$$

$$= (l+2)(l+1) r^{-l-3} - 2(l+1) r^{-l-3} - l(l+1) r^{-l-3} = 0$$

Ich gehe auf deinen Rat hin vermutlich zu Peter Stoffer in die Gruppe – kannst du ihm vielleicht das Blatt mitgeben? Wäre super, danke! :) Und sorry für meine vielen und verwirrten Fragen das Semester über! :D