Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Gruppe Johanna Daub

Theo II Blatt 2

Marvin Zanke

H2) a) $\Lambda \underline{e}_0 = \underline{e}_0$. Mit $\Lambda^\mu{}_\nu = e^{*\mu}(\Lambda \underline{e}_\nu)$

$(e^{*\mu})\underline{e}_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

folgt: $\Lambda^\mu{}_0 = (e^{*\mu})\underline{e}_0 = \delta_{\mu 0}, \quad \mu = 0, \dots, 3$

$\Lambda^0{}_\nu = (e^{*0})(\Lambda e_\nu) = \delta_{0\nu}, \quad \nu = 0, \dots, 3$ ✓

Abbildung $(\Lambda(\underline{e}_\nu)) \neq \underline{e}_0$ für $\nu = 1, \dots, 3$,

da sonst nicht injektiv, damit nicht surjektiv und also keine 4.-dim. Abbildung(*)

~~aber kann Komponenten von $\underline{e}_0$ enthalten!! z.B. $\Lambda(e_1) = \dots$~~ ~~falsch~~

(*) Dafür kann man auch annehmen, dass $\Lambda \cdot e_1 = e_0$ (OBdA.)

dann $((\Lambda e_1) \cdot (\Lambda e_0)) = (e_0 \cdot e_0) = 1$

$\neq (e_1 \cdot e_0) = 0$. Oder andere Argumentation besser?

braucht ~~zusätzliches~~ ~~Argument~~ mit (*) okay

?

Die Matrix hat nun folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Dass C eine orthogonale Matrix sein muss, folgt sofort über Widerspruch.

Nehmen wir dafür $h = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$

und nehmen an, dass $C \notin O(3)$ und $\underline{h}$ und $\underline{k}$ sein Vektoren, für die die Eigenschaft einer Lorentz-Trafo nicht erfüllt ist, also $(\Lambda h \cdot \Lambda k) \neq (h \cdot k)$. Diese finden wir sicher, da $C^T \neq C^{-1} \Leftrightarrow (h \cdot k) \neq h^T C^T C k = (Ch)^T (Ck)$

$= (\Lambda h)^T (\Lambda k) = (\Lambda h \cdot \Lambda k)$

Damit entspräche Λ nicht der gesuchten Darstellung unserer Trafo. Zusätzlich absorbieren wir nun die Vorfaktoren (-1) und $(+1)$ in der Matrix $P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ und damit ist $C \in SO(3)$ ✓

okay. Konstruktiver Beweis ist schöner

aus $(\Lambda \underline{h}, \Lambda \underline{k}) = (\underline{h}, \underline{k}) \Rightarrow C \in O(3)$: $(\Lambda \underline{h}, \Lambda \underline{k}) = h_0 k_0 - C\vec{h} \cdot C\vec{k} \overset{!}{=} h_0 k_0 - \vec{h} \cdot \vec{k}$

$\Rightarrow \langle C\vec{h}, C\vec{k} \rangle = \langle \vec{h}, \vec{k} \rangle \Rightarrow C \in O(3)$

FRAGE:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin O(2)$ Aber $1 = (\vec{a}\cdot\vec{b}) \neq a^T(C^TC)b = (Ca)^T(Cb)$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

Wieso "$\neq$", ist doch richtig?

Die Aussage ist nur: Du findest $\vec{a}, \vec{b}$ sodass $\neq$ gilt! Muss nicht generell gelten!

Habe da irgendwo einen Denkfehler aber komme nicht drauf.

Du hast hier bestimmte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gewählt. Die Eigenschaft $\langle C\vec{a}, C\vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ soll für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gelten – wähle $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a} = \vec{b}$ und du hast deinen Widerspruch!

b) $(\Lambda h \cdot \Lambda k) = (\cosh\alpha\, h^0 + \sinh\alpha\, h^1)(\cosh\alpha\, k^0 + \sinh\alpha\, k^1)$

$- (\sinh\alpha\, h^0 + \cosh\alpha\, h^1)(\sinh\alpha\, k^0 + \cosh\alpha\, k^1)$

$- h^2k^2 - h^3k^3$

$= \cosh^2\alpha\, h^0k^0 + \sinh^2\alpha\, h^1k^1 + \cancel{\cosh\alpha\, h^0k^1 \sinh\alpha} + \cancel{\cosh\alpha\sinh\alpha\, h^1k^0}$

$- \sinh^2\alpha\, h^0k^0 - \cosh^2\alpha\, h^1k^1 - \cancel{\sinh\alpha\, h^0 \cosh\alpha\, k^1} - \cancel{\cosh\alpha\, h^1 \sinh\alpha\, k^0}$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ $- h^2k^2 - h^3k^3$

$\rightarrow = h^0k^0 - h^1k^1 - h^2k^2 - h^3k^3 = (h \cdot k)$ ✓

c)

$\sinh\alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$, $\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$h^0 = x^0 = ct$, $h^i = x^i$, $\frac{1}{c} \rightarrow 0$

$(\Lambda(\alpha)\, h)^0 = \cosh(\alpha)\, h^0 + \sinh(\alpha)\, h^1 = \frac{ct}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} + \frac{\frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$\Leftrightarrow \left[\Lambda(\alpha) \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}\right]^0 = \frac{ct}{\sqrt{1-0}} + \frac{v x^1}{\sqrt{c^2-v^2}} \longrightarrow ct \Leftrightarrow t = t'$ ✓

$(\Lambda(\alpha)\, h)^1 = \Lambda^1{}_\nu h^\nu = \sinh(\alpha)\, h^0 + \cosh(\alpha)\, h^1$

? Ist das so richtig mit Summenkonv. geschrieben? Ja

$\Leftrightarrow \left[\Lambda(\alpha) \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}\right]^1 = \frac{vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \xrightarrow{c^{-1}\to 0} x^1 + vt$

$(\Lambda(\alpha)\, h)^2 = x^2$

$(\Lambda(\alpha)\, h)^3 = x^3$ ✓

d) $\Lambda(\alpha)\underline{e}_0 \overset{b)}{=} \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\sinh^2(\alpha)} \\ \sinh(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\alpha = \sinh^{-1}(|p|)}{=} \begin{pmatrix} \sqrt{1-|p|^2} \\ \sinh(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-|p|^2} \\ |p| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓

?

$$\Rightarrow \operatorname{sign}(p^0)\,O\,\Lambda(\alpha)\underline{e}_0 = \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(p^0)\,O\,\sqrt{1-|p|^2} \\ \operatorname{sign}(p^0)\,O \begin{pmatrix} |p| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

?

Kann man das so schreiben?

Wieso gilt für "O" auf 0.te Komponente angewand dass nichts passiert?

ist Fehler in der Aufgabe
O ist Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aber wird hier auf Vierervektoren angewendet

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sign}(p^0)\sqrt{1-|p|^2} \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \underline{p}$$ ✓

weil Λ Lorentz-Trafo $\Rightarrow (\Lambda e_0, \Lambda e_0) = (e_0 \cdot e_0) = (\underline{p} \cdot \underline{p})$

$$\Rightarrow 1 = p^{0\,2} - \sum_{i=1}^{3} p^{i\,2} \iff p^{0\,2} = 1 + |p|^2$$

$$\Rightarrow p^0 = \operatorname{sign}(p^0)\sqrt{1+|p|^2}$$ ✓

e) fehlt

ok

f) Dass $\hat{\mathcal{L}}$ die Dimension 6 hat, folgt sofort mit der Analogie von Matrizen. 4x4 Matrizen $\Rightarrow$ Dim = 16 allerdings sind die Diagonalelemente = 0, weil $a_{ij} = -a_{ji}$ sonst nicht erfüllt sein kann $\Rightarrow$ $4\cdot(4-1) = 12$. Außerdem ~~legt dann legen~~ die Werte oberhalb oder unterhalb der Diagonalen jeweils die andere Seite fest. $\Rightarrow \frac{4\cdot 3}{2} = 6 = \dim(\hat{\mathcal{L}})$

$W_{\mu\nu}$, $\mu < \nu$ sind genau 6 Elemente, $3\cdot 2\cdot 1$.

Zu zeigen bleibt also, dass es ein EZS ist. ✓

Schreibt man die $\omega_{\mu\nu}$ als Matrizen ist dies aber auch sofort ersichtlich

$$W_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich stellt man mit einer LK dieser jede Matrix mit $a_{ij} = -a_{ji}$ dar und damit jede schiefsymmetrische lineare Abbildung. ✓

Wie schreibt man bzw. beweist man das in Tensorschreibweise? ?

g) $[A, B]_- = AB - BA$

$$(\underline{h} \cdot (AB - BA) \cdot \underline{k}) = (\underline{h} \cdot AB \cdot \underline{k}) - (\underline{h} \cdot BA\underline{k})$$
$$= (A\underline{h} \cdot B\underline{k}) - (B\underline{h} \cdot A\underline{k})$$
$$= (BA\underline{h} \cdot \underline{k}) - (AB\underline{h} \cdot \underline{k}) = ((BA - AB)\underline{h} \cdot \underline{k})$$
$$= -((AB - BA)\underline{h} \cdot \underline{k})$$

h) $(E_{\mu\nu} E_{\kappa\lambda})(\underline{h}) = \underline{e}_\mu (\underline{e}_\nu \cdot (\underline{e}_\kappa)(\underline{e}_\lambda \cdot \underline{h}))) = \underline{e}_\mu (\underline{e}_\nu \cdot (\underline{e}_\kappa) h^\lambda))$

$$= \underline{e}_\mu \cdot h^\lambda \delta_{\nu\kappa} \cdot \epsilon_\kappa = \underline{e}_\mu (\underline{e}_\lambda \cdot \underline{h}) \cdot \delta_{\nu\kappa} \cdot \epsilon^\kappa$$
$$= \eta_{\nu\kappa} \underline{e}_\mu (\underline{e}_\lambda \cdot \underline{h}) = \eta_{\nu\kappa} E_{\mu\lambda}$$ ✓

$$[\omega_{\mu\nu}, \omega_{\kappa\lambda}]_- = (\omega_{\mu\nu} \omega_{\kappa\lambda} - \omega_{\kappa\lambda} \omega_{\mu\nu})(\underline{h})$$
$$= (\omega_{\mu\nu} (E_{\kappa\lambda} \underline{h} - E_{\lambda\kappa} \underline{h}) - \omega_{\kappa\lambda} (E_{\mu\nu} \underline{h} - E_{\nu\mu} \underline{h}))$$
$$= E_{\mu\nu} E_{\kappa\lambda} \underline{h} - E_{\mu\nu} E_{\lambda\kappa} \underline{h} - E_{\nu\mu} E_{\kappa\lambda} \underline{h} + E_{\nu\mu} E_{\lambda\kappa} \underline{h}$$
$$- E_{\kappa\lambda} E_{\mu\nu} \underline{h} + E_{\kappa\lambda} E_{\nu\mu} \underline{h} + E_{\lambda\kappa} E_{\mu\nu} \underline{h} - E_{\lambda\kappa} E_{\nu\mu} \underline{h}$$
$$= (\eta_{\nu\kappa} E_{\mu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} E_{\mu\kappa} - \eta_{\mu\kappa} E_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda} E_{\nu\kappa}$$
$$- \eta_{\lambda\mu} E_{\kappa\nu} + \eta_{\lambda\nu} E_{\kappa\mu} + \eta_{\kappa\mu} E_{\lambda\nu} - \eta_{\kappa\nu} E_{\lambda\mu})(\underline{h})$$

?

fertig?

i) $\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} (\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k})$

$$\overset{(*)}{=} \left(\frac{d}{dt}\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}\right) + \left(\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot \frac{d}{dt}\Lambda(t) \cdot \underline{k}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\Lambda(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad \text{(d.h. } \Lambda(t) = e^{tA}\text{, mit } A \in \hat{L}\text{.)}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1}A^0 + \frac{t}{1}A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right)$$

$$= A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1}\right)$$

$$= A\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A\Lambda(t)$$

ja
ab jetzt dicht
☺

$$\Rightarrow (*) = (A\Lambda(t)\underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}) + (\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot A \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k})$$

$$\overset{A \in \hat{L}}{=} (A\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}) - (A\Lambda(t)\underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}) = 0$$

✓

$$\frac{d}{dt} f(t) = 0 \Rightarrow f(t) = f(0) \Leftrightarrow (\Lambda(t) \cdot \underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}) = (\underline{h} \cdot \underline{k})$$

✓

$\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ ist als Summe sicherlich in L, denn

$$(\underline{h} \cdot \Lambda(t) \cdot \underline{k}) = \left(\underline{h} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \cdot \underline{k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underline{h} \cdot \frac{t^k}{k!} A^k \cdot \underline{k}\right) \underset{\text{Skalare}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \underline{h} \cdot A^k \cdot \underline{k}\right)$$

$A \in \hat{L}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^k \cdot \frac{t^k}{k!} \underline{h} \cdot \underline{k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \underline{h} \cdot \underline{k}\right) = (\Lambda(t)\underline{h} \cdot \underline{k})$$

?
Wirklich richtige Argumentation?

Dass es sogar in L_+ liegt folgt unmittelbar aus der Orthogonalität von $\Lambda(t)$ bzgl. η. Diese würde das Vorzeichen tauschen.

$\det(\exp[B]) = \exp(tr(B))$ benutzen

j) fehlt $\Rightarrow$ $\det \Lambda(t) = \exp[T\, tr(A)] = +1$
da A schief und damit $tr(A) = 0$!