Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 3 Marvin Zanke

H3

$$\underline{x}''(\tau) = \frac{q}{mc} F \underline{x}'(\tau) \qquad (1)$$

a) $$\underline{x}(\tau) = x_0 + \int_0^\tau d\lambda\, e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0 \quad , \alpha = \frac{q}{mc} \qquad (2)$$

Bel.: (2) löst (1) mit $\underbrace{x(0) = x_0 \ , \ \underline{x}'(0) = x'_0}$ auch zu überprüfen (sieht man ja direkt, also hinschreiben)

$$\underline{x}'(\tau) = \underbrace{\int_0^\tau \frac{d}{d\tau} d\lambda}\, e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0$$

Integration & Abl. i. a. nicht vertauschbar (τ steckt ja hier sogar in der Integralgrenze)

$$= \int_0^\tau d\lambda\, \alpha F e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0 = \alpha F \int_0^\tau d\lambda\, e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0$$

wobei ich benutze, dass

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{(\tau-\lambda)\alpha F}\right) = \frac{d}{d\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau-\lambda)^k \alpha^k}{k!} F^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tau-\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^k F^k$$

$$= \alpha F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tau-\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} (\alpha F)^{k-1} = \alpha F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau-\lambda)^k}{k!} \alpha^k F^k$$

$$= \alpha F e^{(\tau-\lambda)\alpha F}$$

Dann: $$\underline{x}''(\tau) = \alpha F \int_0^\tau d\lambda \frac{d}{d\tau} e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0 = \alpha^2 F^2 \int_0^\tau d\lambda\, e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \underline{x}'_0$$

Dann sieht man sofort: $\underline{x}''(\tau) = \alpha F \underline{x}'(\tau) = \alpha^2 F^2 (\underline{x}(\tau) - x(0))$

$\Rightarrow \underline{x}''(\tau) = \frac{q}{mc} F \underline{x}'(\tau)$ mit $\alpha = \frac{q}{mc}$ $\boxtimes$

b) Z.: $G(\tau) = e^{\tau \alpha F}$ ist eine Lorentz-Trafo

Hierzu erst einmal die Matrixschreibweise von $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und mit } F^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir $(Fa \cdot b) + (a \cdot Fb) \stackrel{!}{=} 0$

$$(Fa)^\mu b_\mu + a^\mu (Fb)^\mu = F^\mu{}_\nu a^\nu b_\mu + a^\mu F^\mu{}_\nu b^\nu$$

$$= F^0{}_\nu a^\nu b^0 - F^1{}_\nu a^\nu b^1 - F^2{}_\nu a^\nu b^2 - F^3{}_\nu a^\nu b^3$$
$$+ a^0 F^0{}_\nu b^\nu - a^1 F^1{}_\nu b^\nu - a^2 F^2{}_\nu b^\nu - a^3 F^3{}_\nu b^\nu$$

$$= E_1 a^1 b^0 + E_2 a^2 b^0 + E_3 a^3 b^0 - E_1 a^0 b^1 - B^3 a^2 b^1 + B^2 a^3 b^1$$
$$- E^2 a^0 b^2 + B^3 a^1 b^2 - B^1 a^3 b^2 - E_3 a^0 b^3 - B^2 a^1 b^3 + B^1 a^2 b^3$$

$$+ a^0 E_1 b^1 + a^0 E_2 b^2 + a^0 E_3 b^3 - a^1 E_1 b^0 - a^1 B^3 b^2 + a^1 B^2 b^3$$
$$- a^2 E_2 b^0 + a^2 B^3 b^1 - a^2 B^1 b^3 - a^3 E^3 b^0 - a^3 B^2 b^1 + a^3 B^1 b^2$$

Alle Terme oberhalb und unterhalb des Strichs kürzen sich weg. Das sieht man durch einfaches Hinsehen.

Gibt es hier einen schöneren (leichteren) Weg, das zu zeigen? ?

Sind z.B. Matrizen erlaubt?

ja! :)

benutze $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

Außerdem: $\frac{d}{dt}(G(t)\underline{a} \cdot G(t)\underline{b}) = \left(\frac{d}{dt} G(t)\underline{a} \cdot G(t)\underline{b}\right) + \left(G(t)\underline{a} \cdot \left(\frac{d}{dt} G(t)\right)\underline{b}\right)$ ✓

$$= (\alpha F G(t)\underline{a} \cdot G(t)\underline{b}) + (G(t)\underline{a} \cdot \alpha F G(t)\underline{b})$$
$$= \alpha(-(G(t)\underline{a} \cdot F G(t)\underline{b})) + \alpha(G(t)\underline{a} \cdot F G(t)\underline{b})$$ ✓
$$= 0,$$

wobei ich benutzt habe, dass $\frac{d}{dt} G(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[t\alpha F]^k}{k!}$

$$= \alpha F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha^k F^k = \alpha F\, G(t)$$

(wie in a))

Damit sind wir aber schon fertig, denn wenn

$\frac{d}{dt}(G(t)\underline{a} \cdot G(t)\underline{b})$, dann gilt auch

$(G(t)\underline{a} \cdot G(t)\underline{b}) = (G(0)\underline{a} \cdot G(0)\underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{b})$ ✓

da das Skalarprodukt invariant unter Variation des t ist.

gut!

c) Zu erst den einfacheren Fall: $F = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ B & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{\beta F} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} F^k$$

$$F^2 = \begin{pmatrix} B^2 & 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & B^2-B^2 & 0 & 0 \\ B^2 & 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^3 = F^2 F = \begin{pmatrix} 0 & B^3-B^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^3-B^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{0}$$

$$\Rightarrow e^{\beta F} = \mathbb{1} + \beta F + \frac{\beta^2}{2} F^2$$

$$= \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & \beta B & 0 & 0 \\ \beta B & 0 & -\beta B & 0 \\ 0 & \beta B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(\beta B)^2}{2} & 0 & -\frac{(\beta B)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\beta B)^2}{2} & 0 & -\frac{(\beta B)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}(0) + \int_0^{\tau} d\lambda \, e^{(\tau-\lambda)\alpha F} \, \underline{x}'(0)$$

$$= \underline{x}(0) + \int_0^{\tau} d\lambda \left[\mathbb{1} + (\tau-\lambda)\alpha F + \frac{(\tau-\lambda)^2}{2}\alpha^2 F^2\right] \underline{x}'(0)$$

$$= \underline{x}(0) + \left\{ \tau \mathbb{1} - \left[\frac{(\tau-\lambda)^2}{2}\alpha F\right]_0^{\tau} - \left[\frac{(\tau-\lambda)^3}{6}\alpha^2 F^2\right]_0^{\tau} \right\} \underline{x}'(0)$$

$$= \underline{x}(0) + \left\{ \tau \mathbb{1} + \frac{\tau^2}{2}\alpha F + \frac{\tau^3}{6}\alpha^2 F^2 \right\} \underline{x}'(0)$$

?

Wie geht es nun hier weiter? Oder reicht das?

man kann das noch als eine Matrix schreiben

$$\begin{pmatrix} \tau + \frac{1}{6}\alpha^2 B^2 \tau^3 & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

Mit $F = -E W_{01} + B W_{23}$ findet man

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}(0) + \int_0^\tau dt\, e^{\alpha(t-\tau)E W_{01}} e^{\alpha(\tau - t) B W_{23}} \underline{x}'(0)$$

da $[W_{01}, W_{23}]_- = 0$ (sonst würde $e^{A+B} = e^A e^B$ nicht gelten – Cauchy Umordnung von Reihen)

Wir brauchen also $e^{\beta W_{01}}$ und $e^{\beta W_{23}}$

$$e^{\beta W_{01}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} W_{01}^k$$

Dafür diagonalisieren wir W_{01} (habe es mit Wolfram Alpha gemacht, aber auch selber nachgerechnet ...) und findet:

$$W_{01} = T D T^{-1} \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 =$$

$$\Rightarrow e^{\beta W_{01}} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} D^k T^{-1}$$

damit das konvergiert muss doch $\beta < 1$, oder? dann geometrische Reihe !!!

Außerdem

$$e^{\beta W_{23}} = S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} G^k S^{-1} \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(\tau) = \underline{x}(0) + \int_0^\tau dt\, T e^{\alpha(t-\tau)ED} T^{-1} \cdot S e^{\alpha(\tau - t)BG} S^{-1} \underline{x}'(0) \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Keine Ahnung wie es weiter ~~...~~ ausgerechnet werden soll...

Hinweis beachten & H.2j benutzen :)