Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theo II Blatt 4

Marvin Zanke

H4) $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})$, $\operatorname{rot}\vec{E}(x) = 0$

$\Rightarrow \exists\,\phi: -\operatorname{grad}\phi = \vec{E}(\vec{x})$ und $-\Delta\phi(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})$

darf man das linke so machen? Wieso kann man sonst $\vec{E}$ als nicht mehr vektoriell schreiben? Hatte im Tut. leider den Faden verloren als ich die Frage eigentlich stellen wollen.

$$\int_F d\vec{f}\cdot\vec{E} = \boxed{4\pi Q_V} = \int |d\vec{f}||\vec{E}|\cos(\sphericalangle df, E)$$

← sollte so formal richtig sein

das gilt! $d\vec{f}\cdot\vec{E}$ ist skalar

$$= |\vec{E}(r)|\int_F |d\vec{f}| = \boxed{E\cdot 4\pi r^2} \Leftrightarrow E(r) = \frac{Q_V}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$$

E ist radialsym. (konst. auf Oberfläche einer Kugel) und die Flächennormalen auf einer Kugel sind parallel dazu

für außerhalb einer homogen geladenen Vollkugel

Für innerhalb betrachtet man die im Volumen $V(r')$ eingeschlossene Ladung: $Q_V(r') = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}}\cdot\frac{4}{3}\pi r'^3 = \frac{Q r'^3}{R^3}$

und dann folgt analog zu oben mit

$$4\pi Q_V = E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi\frac{Q r^3}{R^3} \Leftrightarrow E(r) = \frac{Q}{R^3}r$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & \text{für } r \geq R \\ \frac{Q}{R^3}\cdot r & \text{für } r \leq R \end{cases}$$

Da $-\operatorname{grad}\phi = E(r)$ gelten soll müssen wir so ein ϕ suchen

Es folgt: $\phi = -\int dr\, E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r} & \text{für } r \geq R \\ -\frac{Q}{2R^3}r^2 + \frac{Q}{R}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\right) & \text{für } r \leq R \end{cases}$ (*)

wobei wir für $r \geq R$ benutzt haben, dass $\lim_{|\vec{x}|\to\infty}\phi(\vec{x}) = 0$ (Int.konst $= 0$)

und für $r \leq R$ gilt

$$\phi = -\int_r^R dr\, E(r) = \left[-\frac{1}{2}\frac{Q}{R^3}r^2\right]_r^R + C \; \cancel{=} + \frac{Q}{r^2}\Big|_{r=R}$$

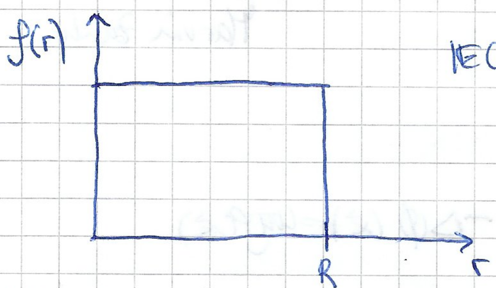
Folgefehler

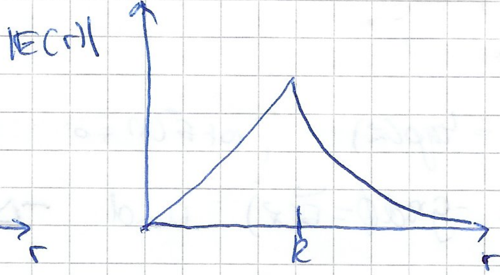
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{Q}{R^3}R^2 + C + \frac{Q}{R^2}$$

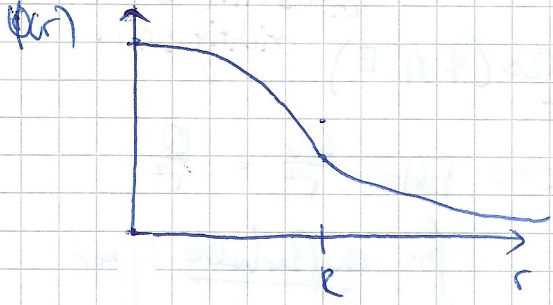
$$\Leftrightarrow -\frac{Q}{2R} + C = \frac{Q}{R^2} \Leftrightarrow C = \frac{Q}{R^2} + \frac{Q}{2R} = \frac{Q}{R}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\frac{1}{2}\frac{Q}{R^3}r^2 + \frac{Q}{R}\left(\cancel{\tfrac{1}{R}}\,1 + \frac{1}{2}\right)$$

und damit (*).







b) Ladungsverteilung: $\rho(\vec x) = \begin{cases} 0 & 0 \le |\vec x| \le R_1 \\ \rho_0 & R_1 < |\vec x| < R_2 \\ 0 & |\vec x| \geq R_2 \end{cases}$

Für das Potential Φ gilt: $\Delta\Phi(\vec x) = -4\pi\rho(\vec x)$

Für $\Delta\Phi = \Delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 = -4\pi(\rho_2(\vec x) - \rho_1(\vec x))$

$$= -4\pi\left[\begin{cases}\rho_0 & |\vec x|\le R_2\\ 0 & |\vec x|>R_2\end{cases} - \begin{cases}\rho_0 & |\vec x|\le R_1 \\ 0 & |\vec x|>R_1\end{cases}\right]$$

$$= -4\pi \begin{cases}\rho_0 & |\vec x|\in (R_1,R_2] \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

halb- offenes Intervall und nicht wie oben offen oder?

?

erfüllen also beide die Poisson-Gleichung für das gleiche ρ, damit entsprechen sie den gleichen Potential.

OK

c) Wir berechnen hier wieder zuerst das elektrische Feld:

Q_2 sei die Ladung $Q_2 = \int_{K_2} \rho_0 \, dV$, wobei $K_2 := \{\vec{x} : |\vec{x}| \le R_2\}$

$$Q_1 = \int_{K_1} \rho_0 \, dV \text{, analog}$$

Und Q sei genau die Differenz dieser beiden Ladungen

$$Q = \int_{K_2 \setminus K_1} \rho_0 \, dV$$

Außerhalb der Hohlkugel gilt nach wie vor:

$$\int_F \vec{E} \, d\vec{f} = 4\pi Q = 4\pi r^2 E(r) \Leftrightarrow \underline{\underline{E(r) = \frac{Q}{r^2}}} \quad , r > R_2$$

Innerhalb der Hohlkugel ist keinerlei Ladung eingeschlossen, das E-Feld verschwindet hier, das Potential wird überall konstant.

$$\underline{\underline{E(r) = 0}} \quad , r < R_1$$

? formal genug alles?

Im Zwischenraum der Hohlkugel gilt:

$$\int_F \vec{E} \, d\vec{f} = 4\pi Q_A \quad \text{wobei } Q_A = \frac{Q}{4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)} \cdot (r^3 - R_1^3)$$

$$\Leftrightarrow 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \frac{Q}{4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)} (r^3 - R_1^3) \cdot 4/3\pi$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{E(r) = \frac{Q}{r^2} \frac{(r^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)}}} = \frac{Q}{r^2} \frac{r^3}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{Q}{r^2} \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} = \underline{\underline{\frac{Qr}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{QR_1^3}{r^2(R_2^3 - R_1^3)}}}$$

?

Zuerst das Potential für außerhalb: (mit $\lim_{r \to \infty} \Phi(r) = 0$)

„≥" statt „>" sonst keine Stet. bed.

$$\Phi(r) = -\int_{R_2}^{r} dr \, E(r) = \frac{Q}{r} \quad r \ge R_2$$

$$\Phi(r) = -\int_{R_1}^{r} dr \, E(r) = -\frac{Qr^2}{2(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{QR_1^3}{r(R_2^3 - R_1^3)} + C \quad R_1 < r < R_2$$

Da $\Phi(R_2) = \frac{Q}{R_2}$ sein soll folgt:

$$\frac{QR_2^2}{2(R_2^3 - R_1^3)} + \frac{QR_1^3}{R_2(R_2^3 - R_1^3)} + \frac{Q}{R_2} = C$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{Q(R_2^2 - r^2)}{2(R_2^3 - R_1^3)} + QR_1^3 \left(\frac{1}{R_2(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{1}{r(R_2^3 - R_1^3)} \right) + \frac{Q}{R_2}$$

$$= \frac{Q}{R_2} \left(\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} + 1 - \frac{R_1^3 R_2}{r(R_2^3 - R_1^3)} + \frac{R_2^3}{2(R_2^3 - R_1^3)} - \frac{r^2 R_2}{2(R_2^3 - R_1^3)} \right)$$

$$= \frac{Q}{R_2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \alpha^3} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\ldots} + \frac{1}{\alpha - \alpha^3} - \frac{R_2}{r} \frac{\alpha^3}{\ldots} + 1 \right)$$

$$= \frac{Q}{R_2}\,\frac{1}{1-\alpha^3}\left(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\,\frac{r^2}{R_2^2}-\frac{R_2}{r}\,\alpha^3\right)$$

Auch hier muss doch ein "<" und kein "≤" stehen oder?

Damit gilt außerdem für den Innenraum der Hohlkugel:

$$\Phi(r) = C\,,\quad \Phi(R_1) = \frac{Q}{R_2}\,\frac{1}{1-\alpha^3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{R_1^2}{R_2^2}-\frac{R_2}{R_1}\,\alpha^3\right)$$

für $r<R_1$ sonst kann man die Stetigkeitsbedingung ja nicht anwenden

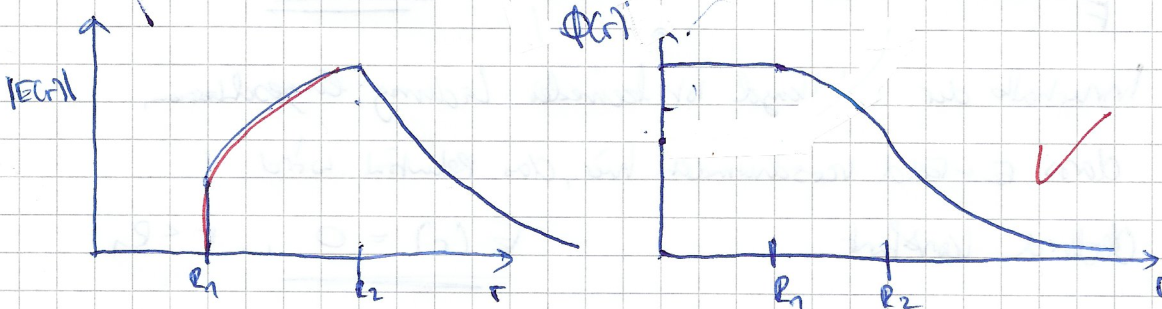
Ja! ☺

$$= \frac{Q}{R_2}\,\frac{1}{1-\alpha^3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha^2\right)$$

$$= \frac{Q}{R_2}\,\frac{1}{1-\alpha^3}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha^2\right) = \frac{Q}{R_2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^3}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{Q}{R_2}\,\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{R_2}\,\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$$

d)



wobei man hier benutzen muss, dass $R_1, R_2 \gg 0$, sonst verhalten die Funktionen sich anders und es dominieren die kleineren Potenzen.

e)
$$\lim_{\alpha\uparrow 1}\Phi(r) = \begin{cases}\frac{Q}{r} & r>R_2\\ \frac{Q}{R_2}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} & r<R_1\end{cases} = \begin{cases}\frac{Q}{r} & \text{für } r>R \quad \text{wobei } R := R_1 = R_2\\ \frac{Q}{R} & r<R\end{cases}$$

R_1 konvergiert „von unten" gegen R_2

Aus Stetigkeitsgründen muss nun auch $\Phi(r) = \frac{Q}{R}$ für $r=R$ gelten.

Die gesamte Ladung ist auf einer unendlich dünnen Kugelschale gelagert.

aber E-Feld (Radialkomp.) unstetig

$$\lim_{r\downarrow R_2}E(r) - \lim_{r\uparrow R_2}E(r) = \frac{Q}{R_2} = 4\pi\sigma$$

↑ Flächenladungsdichte