Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theo II Blatt 5 — Marvin Zanke

H5)
$$\ddot{x} = \frac{Aq}{mc}\left\{\underline{k}(\underline{n}\cdot\dot{\underline{x}}) - \underline{n}(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}})\right\}\sin\left\{(\underline{k}\cdot\underline{x})+\delta\right\}$$

a) Bilinearität von $\langle\,\rangle$

$$(\underline{k}\cdot\ddot{\underline{x}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \frac{Aq}{mc}\left\{\underbrace{(\underline{k}\cdot\underline{k})}_{0}(\underline{n}\cdot\dot{x}) - \underbrace{(\underline{k}\cdot\underline{n})}_{0}(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}})\right\}\sin\left\{(\underline{k}\cdot\underline{x})+\delta\right\}$$
$$= 0$$

$$0 = (\underline{k}\cdot\ddot{\underline{x}}(t)) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(\underline{k}\cdot\underline{x}(t)), \quad \text{da} \quad \frac{d}{dt}(\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\underline{k}\cdot\underline{x}(t)\right) + \left(\underline{k}\cdot\frac{d}{dt}\underline{x}(t)\right)$$

Damit gilt durch Integration:

$$C_0 = \frac{d}{dt}(\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) \iff C_0 t + C_1 = (\underline{k}\cdot\underline{x}(t))$$

Da $C_0 = \frac{d}{dt}(\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}(t)) = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}(0))$, da $\underline{k}$ konstant

$$\iff C_0 = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}(0))$$

Außerdem $C_0 t + C_1 = (\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) \iff C_0\cdot 0 + C_1 = (\underline{k}\cdot\underline{x}(0))$

$$\iff C_1 = (\underline{k}\cdot\underline{x}(0))$$

$$\Rightarrow (\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)t + (\underline{k}\cdot\underline{x}_0) \quad \text{mit } \underline{x}_0 = \underline{x}(0),\ \dot{\underline{x}}_0 = \dot{\underline{x}}(0)$$

b) Folgt fast direkt aus a).

Ich weiß, dass das falsch ist, aber mir fällt nichts besseres ein

Nehmen wir an dass $(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0) = 0$

$$\Rightarrow (\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) = (\underline{k}\cdot\underline{x}(0)) = C, \text{ da } \underline{k} \text{ konstant, } \underline{x}(0) \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) \text{ konstant, da für alle } t \text{ gilt.}$$

? folgt das nicht schon aus a)?

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{y}(\xi(t)) \quad \text{mit} \quad \xi(t) = (\underline{k}\cdot\underline{x}(t)) = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)t + (\underline{k}\cdot\underline{x}_0)$$

? Wieso gelt das nur wenn $(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0) \neq 0$

sonst keine t-Abhängigkeit

$\dot{x}\cdot\dot{x} = \dot{x}_0\cdot\dot{x}_0 = c^2$ $\exists\,\lambda$ mit $\dot{x}_0 = c\lambda e_0$ — $k\cdot\dot{x}_0$ würde bedeuten $k = 0$

c)
$$y''(\xi) = \frac{d}{d\xi}\frac{d}{d\xi}y(\xi(t)) = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\xi}\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\xi}\underline{x}(t)$$

?

wieso gilt das immer? → gilt nur wenn Matrix invertierbar (hier 1×1 :)) d.h. für $k\cdot\dot{x}_0 \neq 0$

$$\frac{d\xi}{dt} = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0) \iff \frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)}$$

$$\Rightarrow y''(\xi) = \ddot{x}(t)\cdot\frac{1}{(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)^2} \quad \text{und} \quad y'(\xi) = \frac{d}{dt}\frac{dt}{d\xi}\underline{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)} \iff \dot{x}(t) = (\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)\,y'(\xi)$$

wie entsteht $k\cdot\dot{x}_0 = k\cdot\dot{x}$?

$$= \frac{1}{(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)^2}\frac{Aq}{mc}\left\{\underline{k}\cdot(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)(\underline{n}\cdot\underline{y}'(\xi)) - \underline{n}(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)(\underline{k}\cdot\underline{y}'(\xi))\right\}\cdot\sin\left\{\xi(t)+\delta\right\}$$

$$= \frac{1}{(\underline{k}\cdot\dot{\underline{x}}_0)}\frac{Aq}{mc}\left\{\underline{k}\cdot(\underline{n}\cdot\underline{y}'(\xi)) - \underline{n}(\underline{k}\cdot\underline{y}'(\xi))\right\}\sin\left\{\xi(t)+\delta\right\}$$

Außerdem $(\underline{k} \cdot y'(\xi)) = (\underline{k} \cdot \frac{d}{d\xi} \underline{y}(\xi)) = \frac{1}{(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} (\underline{k} \cdot \dot{x}(\tau))$

$= 1$, weil $(\underline{k} \cdot \dot{x}(\tau)) = (\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)$

$$\Rightarrow y''(\xi) = \frac{q}{(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \frac{Aq}{mc} \{ \underline{k} \cdot (\underline{n} \cdot y'(\xi)) - \underline{n} \cdot 1 \} \sin\{\xi + \delta\}$$

d)

$$(\underline{n} \cdot y''(\xi)) = \frac{qA}{(\underline{k} \cdot \dot{x}_0) mc} \{ \underbrace{(\underline{n} \cdot \underline{k})}_{0} (\underline{n} \cdot y'(\xi)) - \underbrace{(\underline{n} \cdot \underline{n})}_{-1} \} \sin\{\xi + \delta\}$$

$$= \frac{qA}{mc (\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \sin(\xi + \delta)$$

Da $\frac{d}{d\xi}(\underline{n} \cdot y'(\xi)) = (\underline{n} \cdot y''(\xi))$ folgt durch Integration

$(\underline{n} \cdot y'(\xi)) = -\frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} \cos(\xi + \delta) + \alpha$, wie man einfach nachrechnet.

e)

$$y''(\xi) = \frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \{ \underline{k} [-\frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \cos(\xi + \delta) + \alpha] - \underline{n} \} \sin\{\xi + \delta\}$$

Nun benutzen wir: $\int \sin\{\xi + \delta\} \cos\{\xi + \delta\} d\xi = \frac{\sin^2\{\xi + \delta\}}{2} + C$

$$(*) \Rightarrow y'(\xi) = -\frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \{ \frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} \frac{\sin^2\{\xi + \delta\}}{2} \underline{k} + \underline{k}\alpha \cos\{\xi + \delta\} - \underline{n} \cos\{\xi + \delta\} \} + \beta$$

wobei wir alle Integrationskonstanten in einer (β) zusammenfasst.

$$\Rightarrow y(\xi) = -\frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \{ \frac{qA}{2 \cdot mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} \left[\frac{(\xi + \delta) - \sin\{\xi + \delta\} \cos\{\xi + \delta\}}{2} \right] \underline{k} + \underline{k}\alpha \sin\{\xi + \delta\} - \underline{n} \sin\{\xi + \delta\} \} + \beta\xi + \gamma$$

wobei wir benutzt haben dass $\int \sin^2(\xi + \delta) d\xi = \frac{(\xi + \delta) - \sin(\xi + \delta)\cos(\xi + \delta)}{2} + C$

Und wir alle Integrationskonstanten in einer zusammenfassen.

Es gilt weiterhin: $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ und damit folgt:

$$y(\xi) = \frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} \{ [\frac{qA}{8mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} \sin\{2(\xi + \delta)\} - \underbrace{\frac{qA}{4mc(\underline{k} \cdot \dot{\underline{x}}_0)} (\xi + \delta)}_{\text{wo geht der Term auf dem Zettel verloren?}}] \underline{k} - \underline{k}\alpha \sin\{\xi + \delta\} + \underline{n} \sin\{\xi + \delta\} \} + \underline{\beta}\xi + \underline{\gamma}$$

$= x(\tau)$ mit einsetzen von $\xi(\tau)$

Aus $(\underline{k} \cdot x(\tau)) = (\underline{k} \cdot \beta)\xi + (\underline{k} \cdot \gamma) = (\underline{k} \cdot \beta)(\underline{k} \cdot x(\tau)) + (\underline{k} \cdot \gamma)$ folgt, dass

$(\underline{k} \cdot \beta) = 1$, $(\underline{k} \cdot \gamma) = 0$, da die Gleichung für alle τ gelten muss.

Da $(\underline{n} \cdot y'(\xi)) \overset{(*)}{=} -\cos\{\xi + \delta\} \frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} + (\underline{n} \cdot \underline{\beta}) \overset{d)}{=} -\frac{qA}{mc(\underline{k} \cdot \dot{x}_0)} \cos(\xi + \delta) + \alpha$?

$\Rightarrow (\underline{n} \cdot \underline{\beta}) = \alpha$ Interpretation ?