Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 6 (NICHT ABGEGEBEN!)

(H6)

$$F_{\mu\nu}(x) = A\,\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos(\phi+\alpha) \qquad \text{mit } \phi = k_\lambda x^\lambda$$
$$F'_{\mu\nu}(x) = A'\,\widetilde{k_\mu n'_\nu}\cos(\phi+\alpha') \qquad \text{und } \widetilde{k_\mu n_\nu} = k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu$$
$$\widetilde{k_\mu n'_\nu} = k_\mu n'_\nu - k_\nu n'_\mu$$

$$F^+_{\mu\nu} = A_+\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos(\phi+\alpha_+) + \widetilde{k_\mu n'_\nu}\sin(\phi+\alpha_+)\right\}$$
$$F^-_{\mu\nu} = A_-\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos(\phi+\alpha_-) - \widetilde{k_\mu n'_\nu}\sin(\phi+\alpha_-)\right\}$$

a) Z: $F_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu} \overset{!}{=} F^+_{\mu\nu} + F^-_{\mu\nu}$

$$\Leftrightarrow A\,\widetilde{k_\mu n_\nu}\left[\cos\phi\cos\alpha - \sin\phi\sin\alpha\right] + A'\,\widetilde{k_\mu n'_\nu}\left[\cos\phi\cos\alpha' - \sin\phi\sin\alpha'\right]$$
$$\overset{!}{=} A_+\widetilde{k_\mu n_\nu}\left[\cos\phi\cos\alpha_+ - \sin\phi\sin\alpha_+\right] + A_-\widetilde{k_\mu n_\nu}\left[\cos\phi\cos\alpha_- - \sin\phi\sin\alpha_-\right]$$
$$+ A_+\widetilde{k_\mu n'_\nu}\left[\sin\phi\cos\alpha_+ + \sin\alpha_+\cos\phi\right] - A_-\widetilde{k_\mu n'_\nu}\left[\sin\phi\cos\alpha_- + \sin\alpha_-\cos\phi\right]$$

$$\Leftrightarrow \text{I}: A\cos\alpha \overset{!}{=} A_+\cos\alpha_+ + A_-\cos\alpha_-$$
$$\text{II}: A\sin\alpha = A_+\sin\alpha_+ + A_-\sin\alpha_-$$
$$\text{III}: A'\cos\alpha' \overset{!}{=} A_+\sin\alpha_+ - A_-\sin\alpha_-$$
$$\text{IV}: -A'\sin\alpha' \overset{!}{=} A_+\cos\alpha_+ - A_-\cos\alpha_-$$

$\boxed{\text{I}+\text{IV}}$: $A\cos\alpha - A'\sin\alpha' \overset{!}{=} 2A_+\cos\alpha_+$ (1)

$\boxed{\text{II}+\text{III}}$: $A\sin\alpha + A'\cos\alpha' \overset{!}{=} 2A_+\sin\alpha_+$ (2)

$\boxed{\text{I}-\text{IV}}$: $A\cos\alpha + A'\sin\alpha' \overset{!}{=} 2A_-\cos\alpha_-$ (3)

$\boxed{\text{II}-\text{III}}$: $A\sin\alpha - A'\cos\alpha' \overset{!}{=} 2A_-\sin\alpha_-$ (4)

Aus (1) und (2) folgt sofort: $\dfrac{\sin\alpha_+}{\cos\alpha_+} = \dfrac{A\sin\alpha + A'\cos\alpha'}{A\cos\alpha - A'\sin\alpha'}$

" (3) " (4) " " : $\dfrac{\sin\alpha_-}{\cos\alpha_-} = \dfrac{A\sin\alpha - A'\cos\alpha'}{A\cos\alpha + A'\sin\alpha'}$

Außerdem folgt aus $①^2 + ②^2$:

$$4A_+^2 = A^2 + A'^2 + 2AA'\{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha'\cos\alpha}_{\sin(\alpha-\alpha')}\}$$

und aus $③^2 + ④^2$:

$$4A_-^2 = A^2 + A'^2 - 2AA'\{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha'}_{\sin(\alpha-\alpha')}\}$$

b) Da $F^+_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F^-_{\mu\nu}$ und $F^-_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - F^+_{\mu\nu}$,
wobei $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + F'_{\mu\nu}$
und $F_{\mu\nu}$ und $F'_{\mu\nu}$ sind Lösungen der M.W. Gleichung im Vakuum, ist auch $G_{\mu\nu}$ als Summe Lösung der M.W. Gl. Damit dies gilt müssen aber sowohl $F^+_{\mu\nu}$ als auch $F^-_{\mu\nu}$ die M.W. Gl. erfüllen

Sei nun $\vec{x} = 0 \Rightarrow \phi = x^0 k^0 = k^0 ct = \omega t$

$$(E^\pm(\alpha))^i = A_\pm\{k_0[n_i\cos(\omega t + \alpha_\pm) \pm n'_i\sin(\omega t + \alpha_\pm)]$$
$$- k_i[n_0\cos(\omega t + \alpha_\pm) \pm n'_0\sin(\omega t + \alpha_\pm)]\}$$
$$= A_\pm\cos(\omega t + \alpha_\pm)\{k_0 n_i - k_i n_0\}$$
$$\pm A_\pm\sin(\omega t + \alpha_\pm)\{k_0 n'_i - k_i n'_0\}$$

~~$\mathrm{I} - \mathrm{IV}: \; 2A\cos\alpha = A\cos\alpha + A'\sin\alpha'$ (3)~~

~~$\mathrm{II} - \mathrm{III}: \; 2A\sin\alpha = A\sin\alpha - A'\cos\alpha'$ (4)~~

~~$(3)^2 + (4)^2 \Rightarrow 4A^2 = A^2 + A'^2 + 2AA'\cos\alpha\sin\alpha' - 2AA'\sin\alpha\cos\alpha'$~~

~~$= A^2 + A'^2 - 2AA'\underbrace{(\sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha')}_{\sin(\alpha-\alpha')}$~~

$$A_\pm \cos(\omega t + \alpha_\pm)\{k_0 n_i - k_i n_0\}$$
$$\pm A_\pm \sin(\omega t + \alpha_\pm)\{k_0 n'_i - k_i n'_0\}$$
$$= A_\pm \cos(\omega t + \alpha_\pm)\overbrace{\{n^0 k^i - n^i k^0\}}^{c^i}$$
$$\pm A_\pm \sin(\omega t + \alpha_\pm)\underbrace{\{n'^0 k^i - n'^i k^0\}}_{c'^i}$$

$$|\vec{c}|^2 = c^{1\,2} + c^{2\,2} + c^{3\,2}$$
$$(n^0 k^i - n^i k^0)^2 = n^{0\,2} k^{i\,2} + n^{i\,2} k^{0\,2} - 2 n^0 k^i n^i k^0$$
$$\Rightarrow n^{0\,2}\underbrace{(|\vec{k}|^2)}_{k^{0\,2}} + k^{0\,2}\underbrace{(|\vec{n}|^2)}_{n^{0\,2}+1} - 2n^0 k^0 \underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{k})}_{k^0 n^0} = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = n^{0\,2} k^{0\,2} + k^{0\,2} n^{0\,2} + k^{0\,2} - 2n^{0\,2} k^{0\,2} = k^{0\,2} = |\vec{k}|^2$$

$$|\vec{c}'|^2 = n'^{0\,2}|\vec{k}|^2 + k^{0\,2}|\vec{n}'|^2 - 2n'^0 k^0(\vec{k}\cdot\vec{n}') = k^{0\,2}$$

denn $(n'^0 k^i - n'_i k^0)^2 = n'^{0\,2} k^{i\,2} + n'^{i\,2} k^{0\,2} - 2n'^0 k^0 k^i n'^i$

$$\vec{c}\cdot\vec{c}' = \sum_i (n^0 k^i - n^i k^0)(n'^0 k^i - n'^i k^0) = n^0 n'^0 |\vec{k}|^2 + k^{0\,2}\,\vec{n}\,\vec{n}'$$
$$- n'^0 k^0(\vec{n}\cdot\vec{k}) - k^0 n^0(\vec{k}\cdot\vec{n}')$$
$$= n^0 n'^0 k^{0\,2} + k^{0\,2} n^0 n'^0 - n'^0 k^0 k^0 n^0 - k^0 n^0 k^0 n'^0 = 0$$

$$\vec{C}\cdot\vec{k} = \vec{C}'\cdot\vec{k}' = 0$$

$$\vec{C}\cdot\vec{k} = (n^0 \vec{k}' - \vec{n}' k^0)(\vec{k}') = n^0|\vec{k}|^2 - k^0(\vec{n}\cdot\vec{k})$$
$$= n^0 k^{0\,2} - k^0 n^0 k^0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_\pm(t) = A_\pm |\vec{k}| \left(\vec{\epsilon}_1 \cos(\omega t + \alpha_\pm) \pm \vec{\epsilon}_2 \sin(\omega t + \alpha_\pm)\right)$$
mit $\vec\epsilon_1 = \frac{\vec{C}}{|\vec k|}$, $\vec\epsilon_2 = \frac{\vec{C}'}{|\vec k|}$

$\vec\epsilon_1 \perp \vec\epsilon_2$, $\vec\epsilon_1\perp\vec k$, $\vec\epsilon_2\perp\vec k$

beschreibt das E-Feld am Ursprung und ist die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius $A_\pm|\vec k|$

c) $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \delta$, $\phi = \alpha_0 + (k\cdot x)$

$$G_{\mu\nu} = F^+_{\mu\nu} + F^-_{\mu\nu}$$
$$= A_+\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\underbrace{\cos(\phi+\delta)}_{\cos\phi\cos\delta - \sin\phi\sin\delta} + \widetilde{k_\mu n'_\nu}\underbrace{\sin(\phi+\delta)}_{\sin\phi\cos\delta+\sin\delta\cos\phi}\right\} + A_-\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\underbrace{\cos(\phi-\delta)}_{\cos\phi\cos\delta+\sin\phi\sin\delta} - \widetilde{k_\mu n'_\nu}\underbrace{\sin(\phi-\delta)}_{\sin\phi\cos\delta - \sin\delta\cos\phi}\right\}$$

$$= \cos\phi\left\{A_+\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos\delta + A_+\widetilde{k_\mu n'_\nu}\sin\delta + A_-\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos\delta - A_-\widetilde{k_\mu n'_\nu}\sin\delta\right\}$$
$$+\sin\phi\left\{-A_+\widetilde{k_\mu n_\nu}\sin\delta + A_+\widetilde{k_\mu n'_\nu}\cos\delta + A_-\widetilde{k_\mu n_\nu}\sin\delta - A_-\widetilde{k_\mu n'_\nu}\cos\delta\right\}$$

$$= \cos\phi\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\cos\delta\,(A_++A_-) + \widetilde{k_\mu n'_\nu}\sin\delta\,(A_+-A_-)\right\}$$
$$+\sin\phi\left\{\widetilde{k_\mu n_\nu}\sin\delta\,(A_--A_+) + \widetilde{k_\mu n'_\nu}\cos\delta\,(A_++A_-)\right\}$$

$$= (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu)\cos\delta\cos\phi\,(A_++A_-) + (k_\mu n'_\nu - k_\nu n'_\mu)\sin\delta\cos\phi\,(A_++A_-)$$
$$+ (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu)\sin\delta\sin\phi\,(A_--A_+) + (k_\mu n'_\nu - k_\nu n'_\mu)\cos\delta\sin\phi\,(A_+-A_-)$$

$$= A^{(1)}\left\{k_\mu n_\nu\cos\delta + k_\mu n'_\nu\sin\delta - k_\nu n_\mu\cos\delta - k_\nu n'_\mu\sin\delta\right\}\cos\phi$$
$$+ A^{(2)}\left\{k_\mu n'_\nu\cos\delta - k_\mu n_\nu\sin\delta - k_\nu n'_\mu\cos\delta + k_\nu n_\mu\sin\delta\right\}\sin\phi$$

$$= A^{(1)}(k_\mu n^{(1)}_\nu - k_\nu n^{(1)}_\mu)\cos(kx+\alpha_0) + A^{(2)}(k_\mu n^{(2)}_\nu - k_\nu n^{(2)}_\mu))\sin(kx+\alpha_0)$$

mit $A^{(1)} = A_+ + A_-$, $A^{(2)} = A_+ - A_-$

$\underline{n}^{(1)} = \cos\delta\,\underline{n} + \sin\delta\,\underline{n}'$

$n^{(i)}\cdot n^{(j)} = -\delta_{ij}$

$\underline{n}^{(2)} = -\sin\delta\,\underline{n} + \cos\delta\,\underline{n}'$

$$\left(E(0,t)\right)^i = G_{0i} = A^{(1)}\left(k_0 n_i^{(1)} - k_i n_0^{(1)}\right)\cos(k^0 x^0 + \alpha_0)$$
$$+ A^{(2)}\left(k_0 n_i^{(2)} - k_i n_0^{(2)}\right)\sin(k^0 x^0\ \alpha_0)$$

$$= A^{(1)}\cos(\omega t + \alpha_0)\left\{\overbrace{-k^0 n^{i(1)} + k^i n^{0(1)}}^{c^{i(1)}}\right\}$$
$$+ A^{(2)}\sin(\omega t + \alpha_0)\left\{\underbrace{-k^0 n^{i(2)} + k^i n^{0(2)}}_{c^{i(2)}}\right\}$$

$$c^{i(1)} = n^{0(1)}k^i - k^0 n^{i(1)}$$
$$c^{i(2)} = n^{0(2)}k^i - k^0 n^{i(2)}$$

$$|\vec{c}^{(1)}|^2 = n^{0(1)2}\underbrace{|\vec{k}|^2}_{k^{02}} + k^{02}\underbrace{|\vec{n}^{(1)}|^2}_{n^{0(1)2}+1} - 2n^{0(1)}k^0(\vec{k}\cdot\vec{n}^{(1)})$$
$$= 2n^{0(1)2}k^{02} + k^{02} - 2n^{0(1)}k^0\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{n}^{(1)})}_{(*)}$$

$$\boxed{(*)\quad \cos\delta\,\vec{n}\cdot\vec{k} + \sin\delta\,\vec{n}'\cdot\vec{k} = n^0 k^0\cos\delta + k^0 n^{0\prime}\sin\delta = k^0(n^{0(1)})}$$

$$= k^{02} = |\vec{k}|$$

$$|\vec{c}^{(2)}|^2 = k^{02} = |\vec{k}|^2 \quad \text{analog}$$

$$\vec{c}^{(1)}\cdot\vec{k} = n^{0(1)}|\vec{k}|^2 - k^0(\vec{n}^{(1)}\cdot\vec{k})$$
$$= n^{0(1)}k^{02} - k^0 k^0 n^{0(1)} \quad \text{mit } (*) \uparrow$$
$$= 0$$

Analog folgt $\vec{c}^{(2)}\cdot\vec{k} = 0$

$$\Rightarrow \left(\vec{E}(0,t)\right) = A^{(1)}\vec{c}^{(1)}\cos(\omega t + \alpha_0) + A^{(2)}\vec{c}^{(2)}\sin(\omega t + \alpha_0)$$
$$= |\vec{k}|\left\{A^{(1)}\vec{\epsilon}_1\cos(\omega t + \alpha_0) + A^{(2)}\vec{\epsilon}_2\sin(\omega t + \alpha_0)\right\}$$

mit $\vec{\epsilon}_1 = \dfrac{\vec{c}^{(1)}}{|\vec{k}|}$, $\vec{\epsilon}_2 = \dfrac{\vec{c}^{(2)}}{|\vec{k}|}$

$a = |\vec{k}|\cdot A^{(1)}$, $b = |\vec{k}|\,A^{(2)}$ $\Rightarrow$ Parameterdarstellung Ellipse