Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 7 Marvin Zanke

H7) $(T_{em}(F))_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{\mu\nu}\right\}$

a) $T(F) \overset{!}{=} -\frac{1}{4\pi}\left\{K(F\otimes HF) + \frac{1}{4}K^2(F\otimes H^2F)\eta\right\}$

?

Darf man das einfach komponentenweise zeigen? → Dazu zeigen wir die komponentenweise Übereinstimmung:

jupp

$$(T(F))_{\mu\nu} \overset{!}{=} -\frac{1}{4\pi}\left\{(K(F\otimes HF))_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(K^2(F\otimes H^2F)\eta)_{\mu\nu}\right\}$$

Dafür benutzen wir die Definitionen aus der Vorlesung für die Operationen:

$$(T(F))_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left\{(F\otimes HF)^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu} + \frac{1}{4}\left([K(F\otimes H^2F)]^{\sigma}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{F_{\kappa\mu}\cdot F^{\kappa}{}_{\nu} + \frac{1}{4}(F\otimes H^2F)^{\lambda\sigma}{}_{\lambda\sigma}\eta_{\mu\nu}\right\}$$

wobei wir hier $F_{\kappa\lambda} = -F_{\lambda\kappa}$ und $(H^2F) \hat{=} -F^{\mu\nu}$ in Komp. benutzt haben

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{-F_{\mu\kappa}\cdot F^{\kappa}{}_{\nu} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}(H^2F)^{\lambda\sigma}\eta_{\mu\nu}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{-F_{\mu\kappa}F^{\kappa}{}_{\nu} - \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}\eta_{\mu\nu}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{F_{\mu\kappa}F^{\kappa}{}_{\nu} + \frac{1}{4}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}\eta_{\mu\nu}\right\}$$ ✓

Durch Umbenennung der Indices folgt die Behauptung.

Damit gilt nun: $\varphi^*T_{em}(F) = \varphi^*\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(K(F\otimes HF) + \frac{1}{4}K^2(F\otimes H^2F)\eta\right)\right\}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{\varphi^*K(F\otimes HF) + \frac{1}{4}\varphi^*K^2(F\otimes H^2F)\eta\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{K\varphi^*(F\otimes HF) + \frac{1}{4}K^2\varphi^*(F\otimes H^2F)\eta\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{K(\varphi^*F\otimes H\varphi^*F) + \frac{1}{4}K^2(\varphi^*F\otimes H^2\varphi^*F)\eta\right\} = T_{em}(\varphi^*F)$$

? dürfte man das verwenden oder sollte das hier gezeigt werden? → wobei wir hier sehr oft die aus der VL bekannten Vertauschungen für die Operationen, sowie $\varphi^*(T\otimes U) = \varphi^*T\otimes\varphi^*U$ verwendet haben.

ja, darf man, vllt. noch explizit hinschreiben → benutze $K\varphi^* = \varphi^*K$, $H\varphi^* = \varphi^*H$ sowie $\varphi^*\eta = \eta$

b) $(\operatorname{div} T_{em})_\nu = \partial^\mu T_{\mu\nu} = \partial^\mu \frac{1}{4\pi}\left[F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta_{\mu\nu}\right]$?

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\partial^\mu F_{\mu\lambda}) F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4}\partial^\mu\left[\eta_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}\right]\right\}$$

wieso muss man beim 2. Summand Produktregel anwenden und beim ersten nicht

man muss bei beiden Produktregel anwenden

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\operatorname{div} F)_\lambda F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4}\partial_\nu\left(F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\operatorname{div} F)^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\left[(\partial_\nu F_{\kappa\lambda}) F^{\kappa\lambda} + (\partial_\nu F^{\kappa\lambda}) F_{\kappa\lambda}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\operatorname{div} F)^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\left[F^{\kappa\lambda}(\partial_\nu F_{\kappa\lambda}) + F^{\sigma\omega}\eta_{\sigma\kappa}\eta_{\omega\lambda}(\partial_\nu F^{\kappa\lambda})\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\operatorname{div} F)^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} F^{\kappa\lambda}\left[\partial_\nu F_{\kappa\lambda} + \partial_\nu F_{\kappa\lambda}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{(\operatorname{div} F)^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} F^{\kappa\lambda} (dF)_{\kappa\lambda\nu}\right\}$$

denn man stellt fest dass: $F^{\kappa\lambda} (dF)_{\kappa\lambda\nu}$

$$= F^{\kappa\lambda}\left\{\partial_\kappa F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\lambda}\right\}$$

$$= \underbrace{F^{\kappa\lambda}\left\{\partial_\kappa F_{\lambda\nu} - \partial_\lambda F_{\kappa\nu}\right\}}_{=0} + F^{\kappa\lambda}\partial_\nu F_{\kappa\lambda}$$

$=0$, weil summiert wird über κ, λ und wegen Antisym fällt alles weg.

nee

$\partial\lambda$ der Term Antisym weg

$-F^{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}$

$= F^{\mu\lambda}\partial_\nu F_{\lambda\nu}$

c) $w(\vec{x},t) := T^{00}_{em}(x) \overset{!}{=} \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right)$

$$T_{00\,em}(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{F_{0\lambda}F^{\lambda}{}_{0} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{00}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{F_{0\lambda}\eta^{\lambda\kappa}F_{\kappa 0} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda} \quad F_{0\tau}\right\}$$

?

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{F_{0i}\epsilon_i F_{i0} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda} \quad F^{\kappa\lambda}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{-F_{0i}F_{i0} + \frac{1}{4}F_{0\lambda} \quad F^{0\lambda} + \frac{1}{4}F_{\kappa 0}F^{\kappa 0} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{+E^i\cdot E^i + \frac{1}{4}F_{0\lambda}\eta^{\lambda\kappa}\eta^{00}F_{0\kappa} + \frac{1}{4}F_{\kappa 0}\eta^{\kappa\sigma}\eta^{0\lambda}F_{\sigma\lambda} + \frac{1}{4}F_{ij}\eta^{ik}\eta^{j\sigma}F_{k\sigma}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{E^i\cdot E^i - \frac{1}{4}F_{0i}F_{0i} - \frac{1}{4}F_{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{E^i\cdot E^i - \frac{1}{2}E^i\cdot E^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k\epsilon_{ijl}B^l\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}E^i\cdot E^i + \frac{1}{4}\cdot 2\delta_{kl}B^kB^l\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}E^i\cdot E^i + \frac{1}{2}B^l\cdot B^l\right\}$$
$$= \frac{1}{8\pi}\left\{|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right\} \quad \text{und} \quad T^{00} = \eta^{\kappa 0}\eta^{\lambda 0}T_{\kappa\lambda} = T_{00}$$

? Hat das einen Sinn dass wenn das so komisch mit $\frac{1}{c}\cdot c\cdot\frac{1}{4\pi}\cdots$ definiert?

wegen der Einheiten

d) $T^{0i}_{em} \overset{!}{=} \frac{1}{c}S^i$, $S^i(\vec{x},t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]^i$

$$T^{0i}_{em} = \eta^{0\kappa}\eta^{i\lambda}T_{\kappa\lambda} = -T_{0i} = -\frac{1}{4\pi}\left\{F_{0\lambda}F^{\lambda}{}_{i} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{0i}\right\}$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{F_{0j}F^{j}{}_{i} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{0i}\right\}$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left\{F_{0j}\eta^{jk}F_{ki} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{0i}\right\} = -\frac{1}{4\pi}\left\{-F_{0j}F_{ji} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{0i}\right\}$$

$\eta_{0i} = 0$ für $i = 1,2,3$

$$\to \quad = \frac{1}{4\pi}\left\{-\epsilon_{jik}B^k\cdot E^j + 0\right\} = \frac{1}{4\pi}\left\{\epsilon_{ijk}E^jB^k\right\}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]^i$$

also Bezug zu Ex-Physik

✓

e) $F_{\mu\lambda} = A\{k_\mu n_\lambda - n_\mu k_\lambda\} \cos(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)$

$$(T_{em}(F))_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}\eta_{\mu\nu}\right\}$$

$$F^{\lambda}{}_{\nu} = \eta^{\lambda\sigma}F_{\sigma\nu} = \eta^{\lambda\sigma}A\{k_\sigma n_\nu - n_\sigma k_\nu\}\cos(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)$$
$$= A\{k^\lambda n_\nu - n^\lambda k_\nu\}\cos(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)$$

$$F^{\kappa\lambda} = \eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\epsilon}F_{\sigma\epsilon} = \eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\epsilon}A\{k_\sigma n_\epsilon - n_\sigma k_\epsilon\}\cos(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)$$
$$= A\{k^\kappa n^\lambda - n^\kappa k^\lambda\}\cos(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)$$

$$\rightarrow (T_{em})_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\Big\{A^2\cos^2(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)[k_\mu n_\lambda - n_\mu k_\lambda][k^\lambda n_\nu - n^\lambda k_\nu]$$
$$+ \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}A^2\cos^2(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)[k_\kappa n_\lambda - n_\kappa k_\lambda][k^\kappa n^\lambda - n^\kappa k^\lambda]\Big\}$$

$(\underline{n},\underline{n}) = -1$
$(\underline{k},\underline{k}) = 0$
$(\underline{k},\underline{n}) = 0$

$$\overset{}{=} \frac{1}{4\pi}\Big\{A^2\cos^2(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)(k_\mu k_\nu)$$
$$+ \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}A^2\cos^2(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)(0+0+0+0)\Big\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}A^2\cos^2(\underline{k}\cdot\underline{x}+\delta)\,k_\mu k_\nu$$

✓

H8)

a) $\eta(\underline{z}'(\tau), \underline{z}'(\tau)) = c^2$ (*)

$$T^{\mu\nu}_{mat}(\underline{x}) = mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z'^{\mu}(\tau)\, z'^{\nu}(\tau)\, \delta^{(4)}(\underline{x} - \underline{z}(\tau))$$

$$T^{00}_{mat}(\vec{x}, t) = mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z'^{0}(\tau)\, z'^{0}(\tau)\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))\, \delta(x^0(\tau) - z^0(\tau))$$

ist hier einfach ≥ 0 angenommen

? Wieso weiß man dass $\frac{dz^0}{d\tau} \geq 0$ sodass man es ohne Betrag schreiben kann bzw. aus dem Betrag rausziehen

Mit (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{dz^0}{d\tau}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{z}}{d\tau}\right|^2 = c^2$ und $\frac{d\vec{z}}{d\tau} = \frac{d\vec{z}}{dz^0} \cdot \frac{dz^0}{d\tau}$

$$\Leftrightarrow c^2 = \left(\frac{dz^0}{d\tau}\right)^2 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0} \cdot \frac{dz^0}{d\tau}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \left(\frac{dz^0}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2\right) \Leftrightarrow \left(\frac{dz^0}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2}{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}$$

$$\Rightarrow T^{00}_{mat} = mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; \delta(ct - z^0(\tau))\, \frac{c^2}{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$d\tau = \frac{dz^0 \sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}}{c}$

$$= mc \int_{-\infty}^{\infty} dz^0 \, \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}\, \frac{c^2}{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}\, \delta(ct - z^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= mc^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz^0 \, \delta(ct - z^0(\tau))\, \frac{1}{\sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}}\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))\, \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{z}}(t)|^2}{c^2}}} \quad \blacksquare$$

Außerdem gilt:

$$T^{k0}_{mat}(\vec{x}, t) = mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; z'^{k}(\tau)\, z'^{0}(\tau)\, \delta(ct - z^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= mc \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \frac{dz^k}{d\tau} \cdot \frac{dz^0}{d\tau}\, \delta(ct - z^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$\frac{dz^k}{d\tau} = \frac{dz^k}{dz^0} \cdot \frac{dz^0}{d\tau}$

$$= mc \int_{-\infty}^{\infty} dz^0 \, \frac{dz^k}{dz^0}\, \frac{dz^0}{d\tau}\, \delta(ct - z^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= mc \int_{-\infty}^{\infty} dz^0 \, \frac{dz^k}{dz^0}\, \frac{c}{\sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{dz^0}\right|^2}}\, \delta(ct - z^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= mc \, \frac{dz^k}{d(ct)}\, \frac{c}{\sqrt{1 - \left|\frac{d\vec{z}}{d(ct)}\right|^2}}\, \delta^{(3)}(\cancel{\vec{x}}(\tau) - \vec{z}(\tau))$$

$$= mc \, \dot{z}^k \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{z}}(t)|^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{c} T^{k0}_{mat}(\vec{x}, t) = \frac{m \dot{z}^k(t)}{\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{z}}(t)|^2}{c^2}}}$$

$\blacksquare$

✓