Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theoretische Physik II Blatt 8 — Marvin Zanke

H10

e) $t = \eta(p_1 - p_3, p_1 - p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(T_1 - T_3) \\ \vec p_1 - \vec p_3 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{c^2}(T_1 - T_3)^2 - (\vec p_1 - \vec p_3)^2$

$= \eta(p_1, p_1) + \eta(p_3, p_3) - 2\eta(p_1, p_3) =$

$= \frac{1}{c^2}T_1^2 - |\vec p_1|^2 + \frac{1}{c^2}T_3^2 - |\vec p_3|^2 - \frac{2}{c^2}T_1 T_3 + 2\vec p_1 \vec p_3$

BELIEBIGES SYSTEM!

2

Ist nur $\eta(P,P)$ mit $P = p_1 + p_2$ invariant oder auch schon p_1 und p_2?

$t^{(!)} - 4\sin^2\frac{\theta^{cms}}{2}|\vec p_1^{cms}||\vec p_3^{cms}|$

da η invariant unter Λ

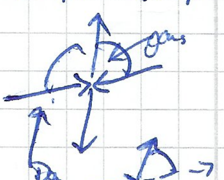
$= \frac{1}{c^2}(T_1^{cms} - T_3^{cms})^2 - (|\vec p_1^{cms}| - |\vec p_3^{cms}|)^2 - 4\underbrace{\sin^2\frac{\theta^{cms}}{2}}_{\frac{1}{2}(1-\cos\theta^{cms})}|\vec p_1^{cms}||\vec p_3^{cms}|$

$-2|\vec p_1^{cms}||\vec p_3^{cms}| + 2\cos\theta^{cms}|\vec p_1^{cms}||\vec p_3^{cms}|$

$= \frac{1}{c^2}(T_1^{cms} - T_3^{cms})^2 - |\vec p_1^{cms}|^2 - |\vec p_3^{cms}|^2 + 2\cos\theta^{cms}|\vec p_1^{cms}||\vec p_3^{cms}|$

$\vec x \cdot \vec y = |\vec x|\cdot|\vec y|\cdot\cos(\sphericalangle x, y) \rightarrow$

$= \frac{1}{c^2}T_1^{cms\,2} - |\vec p_1^{cms}|^2 + \frac{1}{c^2}T_3^{cms\,2} - |\vec p_3^{cms}|^2 - \frac{2}{c^2}T_1^{cms}T_3^{cms} + 2\vec p_1^{cms}\cdot\vec p_3^{cms}$



$= \eta(p_1, p_1) + \eta(p_2, p_2) - 2\eta(p_1, p_3) = t$

Da Vektorrichtungen so liegen ist dies genau der Winkel zwischen $\vec p_1, \vec p_3$

f) $(m_1^2 - m_2^2)c^2 = \eta(p_1, p_1) - \eta(p_2, p_2) = \eta(p_1 + p_2, p_1 - p_2)$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(T_1 + T_2) \\ \vec p_1 + \vec p_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{c}(T_1 - T_2) \\ \vec p_1 - \vec p_2 \end{pmatrix}$ Außerdem $s = \frac{1}{c^2}(T^{cms})^2 = \frac{1}{c^2}(T_1^{cms} + T_2^{cms})^2$

$\Leftrightarrow T_2^{cms} = c\sqrt{s} - T_1^{cms}$

$\overset{cms}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(T_1^{cms} + T_2^{cms}) \\ \underbrace{\vec p_1^{cms} + \vec p_2^{cms}}_{0,\ cms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{c}(T_1^{cms} - T_2^{cms}) \\ \vec p_1^{cms} - \vec p_2^{cms} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{c^2}(T_1^{cms} + c\sqrt{s} - T_1^{cms})(2T_1^{cms} - c\sqrt{s}) = \frac{1}{c^2}(2c\sqrt{s}T_1^{cms} - c^2 s)$

$\Leftrightarrow (m_1^2 - m_2^2)c^2 = \frac{2}{c}\sqrt{s}T_1^{cms} - s \Leftrightarrow \frac{1}{c}T_1^{cms} = \frac{(m_1^2 - m_2^2)c^2 + s}{2\sqrt{s}}$

Mit $T_2^{aus} = c\sqrt{s} - T_1^{aus}$ folgt sofort mit $\frac{1}{c}T_1^{aus} = \frac{s + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2\sqrt{s}}$

$$\frac{1}{c}T_2^{aus} = \sqrt{s} - \frac{1}{c}T_1^{aus} = \frac{2s - s - m_1^2c^2 + m_2^2c^2}{2\sqrt{s}} = \frac{s + m_2^2c^2 - m_1^2c^2}{2\sqrt{s}}$$

Nun gilt: $\eta(p_1, p_1) = m_1^2c^2 = \frac{1}{c^2}T_1^{aus^2} - |\vec{p}_1^{aus}|^2$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{p}_1^{aus}| = \sqrt{\frac{T_1^{aus2}}{c^2} - m_1^2c^2} = \sqrt{\left(\frac{s + m_1^2c^2 - m_2^2c^2}{2\sqrt{s}}\right)^2 - m_1^2c^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 + (m_1^2c^2)^2 + (m_2^2c^2)^2 + sm_1^2c^2 - sm_2^2c^2 + sm_1^2c^2 - m_1^2m_2^2c^4 - sm_2^2c^2 - m_1^2m_2^2c^4 - 4sm_1^2c^4}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 + (m_1^2c^2)^2 + (m_2^2c^2)^2 - 2sm_1^2c^2 - 2sm_2^2c^2 - 2m_1^2m_2^2c^4}$$

Tipp mit der Källen-Funktion

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s - (m_1c + m_2c)^2}\sqrt{s - (m_1c - m_2c)^2}$$

$$= \frac{(s - c^2(m_1 + m_2)^2)^{1/2}(s - c^2(m_1 - m_2)^2)^{1/2}}{2\sqrt{s}}$$

Da $\vec{p}_2^{aus} = -\vec{p}_1^{aus}$ folgt sofort $|\vec{p}_2^{aus}| = |\vec{p}_1^{aus}|$

g) Im Laborsystem gilt: $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T_1^{lab} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T_2^{lab} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

$$\eta(p_2,p_2) = m_2^2 c^2 = \frac{1}{c^2} T_2^{lab\,2} \Leftrightarrow \underline{\underline{T_2^{lab} = m_2 c^2}}$$

$$s = \eta(p_1+p_2, p_1+p_2) - \eta(p_1,p_1) + \eta(p_2,p_2) + 2\eta(p_1,p_2)$$
$$= m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + \frac{2}{c^2} T_1^{lab} T_2^{lab}$$

$$\Leftrightarrow \quad s - (m_1^2 + m_2^2) c^2 = \frac{2}{c^2} T_1^{lab} m_2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{s - m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2 m_2} = T_1^{lab} \Leftrightarrow \frac{1}{c} T_1^{lab} = \frac{s - m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2 m_2 c}$$

Nun gilt $\quad \eta(p_1,p_1) = m_1^2 c^2 = \frac{1}{c^2} T_1^{lab\,2} - |\vec{p}_1|^2$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{p}_1| = \sqrt{\frac{T_1^{lab\,2}}{c^2} - m_1^2 c^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{p}_1| = \frac{1}{2 m_2 c} \sqrt{s^2 + (m_1^2 c^2)^2 + (m_2^2 c^2)^2 - s m_1^2 c^2 - s m_2^2 c^2 - s m_1^2 c^2 + 2 m_1^2 m_2^2 c^4 - s m_2^2 c^2 - 4 m_2^2 c^2 m_1^2 c^2}$$

$$= \frac{1}{2 m_2 c} \sqrt{s^2 + (m_1^2 c^2)^2 + (m_2^2 c^2)^2 - 2 s m_1^2 c^2 - 2 s m_2^2 c^2 - 2 m_2^2 m_1^2 c^4}$$

Källén-Fkt. $\lambda(x,y,z)$
$$= \frac{1}{2 m_2 c} \sqrt{s - (m_1 c + m_2 c)^2} \sqrt{s - (m_1 c - m_2 c)}$$

$$= \frac{\left(s - c^2 (m_1 + m_2)^2\right)^{1/2} \left(s - c^2 (m_1 - m_2)^2\right)^{1/2}}{2 m_2 c}$$

h) Hierfür betrachten wir:

$$(m_2^2 - m_1^2) c^2 = -\eta(p_1 + p_2, p_1 - p_2) = \eta(p_1 + p_2, p_2 - p_1) = \eta(P, p_2 - p_1)$$

mit $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T \\ \vec{0} \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T_2 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} T_2 \\ -\vec{p}_1 \end{pmatrix}$

wird daraus, | und $P = p_1 + p_2 \Leftrightarrow p_2 = P - p_1$

$$(m_2^2 - m_1^2) c^2 = \eta(P, P - 2p_1) = \eta(P,P) - 2\eta(P, p_1) = M^2 c^2 - 2/c^2 \, T T_1$$
$$= M^2 c^2 - \frac{2}{c^2} T_1 M c^2 = M^2 c^2 - 2 M T_1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 M T_1 = M^2 c^2 - m_2^2 c^2 + m_1^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2M} \Rightarrow \frac{1}{c} T_1 = \frac{M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2 M c}$$

$T_2 = T - T_1$

i) $\eta(p_1, p_1) = m_1^2 c^2 = \frac{1}{c^2} T_1^2 - |\vec{p}_1|^2 \iff |\vec{p}_1| = \sqrt{\frac{T_1^2}{c^2} - m_1^2 c^2}$

$$\Rightarrow |\vec{p}_1| = \frac{1}{2Mc} \sqrt{(M^2c^2)^2 + (m_1^2c^2)^2 + (m_2^2c^2)^2 + 2M^2c^4 m_1^2 - 2M^2 m_2^2 c^4 - 2m_1^2 m_2^2 c^4 - 4M^2 m_1^2 c^4}$$

$$= \frac{1}{2Mc} \sqrt{M^2c^2 - (m_1 c + m_2 c)^2} \sqrt{M^2c^2 - (m_1 c - m_2 c)^2}$$

$$= \frac{(M^2c^2 - c^2(m_1 + m_2)^2)^{1/2} (M^2c^2 - c^2(m_1 - m_2)^2)^{1/2}}{2Mc}$$

$\boxtimes$