Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Theo II Blatt 9 — Marvin Zanke

H10)

a) Dafür sei zuerst bemerkt, dass sich nach $\boxed{H8)}$ die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors mit einer Fallunterscheidung wie folgt schreiben lassen:

?
Wieso steht hier urplötzlich $z(t)$ in der δ-Fkt und nicht mehr $z(\tau)$ wie auf Blatt 7?

ist doch analog! in $T^{\mu\nu}$ steht $z(\tau)$ sonst $z(t)$??

$$T^{00}_{mat} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}(t)|^2}{c^2}}}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}(t))$$

$$\frac{1}{c}\,T^{k0}_{mat} = \frac{m\dot{z}^k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}(t)|^2}{c^2}}}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}(t)), \quad k=1,2,3$$

Das einzige, was sich bei uns nun geändert hat, ist die Tatsache, dass wir mehrere Punktteilchen haben, sodass über diese summiert werden muss.

?
Muss es ein x^i_k am Ende der Zeile sein oder ist x^i für alle k gleich?

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{00}_{mat}(\underline{x})\,x^i} = \frac{1}{c}\int d^3x \sum_k m_k c^2\,\frac{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_k(t))}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}\,x^i$$

$$= c\sum_k m_k z^i_k(t)\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}} = \sum_k \frac{m_k c}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}\,z^i_k(t)$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0i}_{mat}(\underline{x})\,x^0}\Big|_{x^0=ct} = \int d^3x \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{z}_k(t))\,x^0$$

$$= \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}\,ct$$

$$\Rightarrow M^{0i}_{mat} = \int d^3x \left[T^{00}_{mat}(\underline{x})\,x^i - T^{i0}_{mat}(\underline{x})\,x^0\right]\Big|_{x^0=ct}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k c}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}\left\{z^i_k(t) - \dot{z}^i_k(t)\,t\right\}$$

Außerdem:

$$\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0i}_{mat}(\underline{x})\, x^j = \int d^3x \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}_k(t)|^2}{c^2}}}\, \delta^{(3)}(\vec x - \vec z_k(t))\, x^j$$

$$= \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}_k(t)|^2}{c^2}}}\, z^j_k(t)$$

Analog gilt für $\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0j}_{mat}(\underline{x})\, x^i = \sum_k \frac{m_k \dot{z}^j_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}_k(t)|^2}{c^2}}}\, z^i_k(t)$

und damit folgt:

$$M^{ij}_{mat} = \frac{1}{c}\int d^3x \left[T^{0i}_{mat}(\underline{x})\, x^j - T^{0j}_{mat}(\underline{x})\, x^i\right]\Big|_{x^0=ct}$$

$$= \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)\, z^j_k(t) - m_k \dot{z}^j_k(t)\, z^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}_k(t)|^2}{c^2}}} \qquad (*)$$

{ Wie löst man die Aufgabe anders herum, also ohne das Ergebnis zu benutzen? Bzw. wer kommt auf die δ-Distributionen ☺

äh, Übung ☺

Außerdem gilt mit $\vec L_{mat} = \sum_{k=1}^{N}\left[\vec z_k(t)\times \vec p_k(t)\right]$, dass

$$M^{ij}_{mat} \overset{!}{=} -\sum_{\ell=1}^{3}\epsilon_{ij\ell} L^\ell_{mat} = -\sum_k \epsilon_{ij\ell}\,\epsilon_{\ell mn}\, z^m_k p^n_k$$

$$= -\sum_k \left\{\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right\} z^m_k p^n_k = -\sum_k \left\{z^i_k p^j_k - z^j_k p^i_k\right\}$$

$$= \sum_k z^j_k p^i_k - z^i_k p^j_k \overset{\text{Def } p_k}{=} \sum_k z^j_k \frac{m_k \dot{z}^i_k}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}(t)|^2}{c^2}}} - z^i_k \frac{m_k \dot{z}^j_k}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}(t)|^2}{c^2}}}$$

$$= \sum_k \frac{m_k \dot{z}^i_k(t)\, z^j_k - m_k \dot{z}^j_k\, z^i_k}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec z}_k(t)|^2}{c^2}}},$$ was offensichtlich äquivalent zu (*) ist.

b) Auch hier stellt man fest, dass auf Blatt 7, $\boxed{H7}$ bereits gezeigt wurde, dass

$$T^{00}_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right)$$

$$T^{0i}_{em} = \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{x},t) \times \vec{B}(\vec{x},t)\right]^i$$

? Darf man das benutzen? Dann ist die Aufgabe fast trivial??

Jupp :)

Mit $p^0 = \frac{1}{c}\int d^3x\, T^{00}_{tot}(x)\big|_{x^0=ct} = \frac{1}{c}\int d^3x \left\{T^{00}_{mat} + T^{00}_{em}\right\}(x)\big|_{x^0=ct}$

$$= \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{00}_{mat}(x)\big|_{x^0=ct}} + \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{00}_{em}(x)\big|_{x^0=ct}}_{(*)}$$

$$= \frac{1}{c}\sum_k \frac{m_k c^2}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}} = \sum_k \frac{m_k c}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}$$

? Wofür steht hinter den Integralen immer $|x^0=ct$, gibt doch gar keine x^0 mehr?

$T^{\mu\nu}$ hängt doch von 4er-Vektor $\underline{x}$ ab, also auch von x^0

$$(*) = \frac{1}{c}\int d^3x\, \frac{1}{8\pi}\left\{|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi c}\int d^3x \left(|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right)$$

$$\Rightarrow p^0 = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k c}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}} + \frac{1}{8\pi c}\int d^3x \left(|\vec{E}(\vec{x},t)|^2 + |\vec{B}(\vec{x},t)|^2\right)$$

$$p^i = \frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0i}_{tot}\big|_{x^0=ct} = \frac{1}{c}\int d^3x \left\{T^{0i}_{mat} + T^{0i}_{em}\right\}(x)\big|_{x^0=ct}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0i}_{mat}(x)\big|_{x^0=ct}} + \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3x\, T^{0i}_{em}(x)\big|_{x^0=ct}}_{(*)}$$

$$= \sum_k \frac{m_k \dot{z}_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}$$

$$(*) = \frac{1}{c}\int d^3x\, \frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]^i = \frac{1}{4\pi c}\int d^3x \left[\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]^i$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \dot{\vec{z}}_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{z}}_k(t)|^2}{c^2}}}}_{\vec{p}_k} + \frac{1}{4\pi c}\int d^3x \left[\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)\right]$$

Hier gilt: $L^{\ell}_{tot} = -\frac{1}{2}\sum \epsilon_{\ell ij} M^{ij}_{tot}(t) = -\frac{1}{2}\epsilon_{\ell ij}\left\{\frac{1}{c}\int d^3x\left[T^{0i}_{tot}x^j - T^{0j}_{tot}x^i\right]\right\}$

mit $T_{tot} = T_{mat} + T_{em}$ gilt dann,

$$L^{\ell}_{tot} = \underbrace{-\frac{1}{2}\epsilon_{\ell ij}\left\{M^{ij}_{mat}\right.}_{L^{\ell}_{mat}} + \underbrace{\left.M^{ij}_{em}\right\}}_{L^{\ell}_{em}}, \text{ wobei } M^{ij}_{em} = \frac{1}{c}\int d^3x\left[T^{0i}_{em}x^j - T^{0j}_{em}x^i\right]$$

$$L^{\ell}_{em} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\ell ij}M^{ij}_{em} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\ell ij}\left\{\frac{1}{c}\int d^3x\,\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}(x,t)\times\vec{B}(x,t)\right]^i x^j - \left[\vec{E}\times\vec{B}\right]^j x^i\right\}\right\}$$

$$= +\frac{1}{8\pi c}\int d^3x\,\epsilon_{\ell ij}\left\{x^i[E\times B]^j - x^j[E\times B]^i\right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi c}\int d^3x\left\{\left[x\times[E\times B]\right]^{\ell} + \left[x\times[E\times B]\right]^{\ell}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int d^3x\left[x\times[E\times B]\right]^{\ell}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_{mat} + \vec{L}_{em} = \sum_k\left[\vec{z}_k(t)\times\vec{p}_k(t)\right] + \frac{1}{4\pi c}\int d^3x\left[x\times[E\times B]\right]$$

? Ist $\vec{L}$ oder M^{ij} die erhaltene Größe? Nur wie man M^{ij} definiert?

wegen $M^{ij} = -\epsilon_{ij\ell}L^{\ell}$ ist L automatisch erhalten wenn M^{ij} es ist & umgekehrt

Als letztes betrachtet man $M^{0i}_{tot} = M^{0i}_{mat} + M^{0i}_{em} = \sum_k \frac{m_k c}{\sqrt{1-\frac{|\dot{z}_k(t)|^2}{c^2}}}\left(z^i_k(t) - t\dot{z}^i_k(t)\right) + M^{0i}_{em}$

$$M^{0i}_{em} = \frac{1}{c}\int d^3x\left[T^{00}_{em}x^i - T^{0i}_{em}x^0\right]$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x\left\{\frac{1}{8\pi}(|E|^2+|B|^2)x^i - \frac{1}{4\pi}(E\times B)^i ct\right\}$$

$$\Rightarrow M^{0i}_{tot} = c\sum_k\left\{\frac{m_k z^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{z}_k(t)|^2}{c^2}}}\right\} - P^i_{mat}\cdot t + \int d^3x\left\{\frac{1}{8\pi c}(|E|^2+|B|^2)x^i - t\frac{1}{4\pi}(E\times B)^i\right\}$$

$$= c\left\{\sum_k\frac{m_k z^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{z}_k(t)|^2}{c^2}}} + \int d^3x\,\frac{1}{8\pi c^2}(|E|^2+|B|^2)x^i - P^i_{mat}t - \underbrace{t\cdot\int d^3x\,\frac{1}{4\pi c}(E\times B)^i}_{t\cdot P^i_{em}}\right\}$$

$$= c\left\{\underbrace{\sum_k\frac{m_k z^i_k(t)}{\sqrt{1-\frac{|\dot{z}_k(t)|^2}{c^2}}}}_{R^i_{mat}} + \underbrace{\frac{1}{8\pi c^2}\int d^3x\,(|E|^2+|B|^2)x^i}_{R^i_{em}} - P^i_{tot}\cdot t\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{mat} + \vec{R}_{em} - \vec{P}_{tot}\,t = \vec{R}_0$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{R}_0}{c} = \vec{R}_{mat} + \vec{R}_{em} - \vec{P}_{tot}\cdot t$$

??

Wo ist das p_0 taucht in meiner Rechnung nicht auf?