Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

18.04.16 Theoretische Physik III Blatt 1

Marvin Zanke
Florian Stradwitz
Till Wenigmann

Könnt ihr die a vorrechnen?

a	b	c	d	e	Σ
4/4	4/4	4/4	4/4	3/4	19/20

sehr gut

H1)

a) $G_a[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \vartheta(x-a)\,\phi(x)$

$$G_a'[\phi] = G_a[-\phi'] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \vartheta(x-a)(-\phi'(x)) = -\int_a^{\infty} \phi'(x)$$

$$= -[\phi(\infty) - \phi(a)] = \phi(a) = \delta_a[\phi] \quad ✓$$

Schwartz-Fkt und demnach $\phi(\infty) = 0$

b)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{F}[g_\epsilon](k) \overset{!}{=} 2\pi\,\delta_0 \quad \text{mit } g_\epsilon(x) = e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2},\quad g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|\epsilon|} \mathcal{F}[g]\left(\frac{k}{\epsilon}\right), \text{ denn } g_\epsilon(x) = g(\epsilon x)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|\epsilon|} \sqrt{2\pi}\, g\left(\frac{k}{\epsilon}\right), \text{ mit A2, c)} \quad ✓$$

Nun zeigen wir, dass ähnlich zur δ-Distribution beim integrieren über den gesamten Raum, genau der Wert an einer Stelle herauskommt.

Warum kommt immer 2π raus, wenn ich ohne Testfkt integriere? ?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|\epsilon|} \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{k^2}{\epsilon^2}}\right)\phi(k)\,dk \quad \text{Substituiere: } z = \frac{k}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{dz}{dk} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \underbrace{\frac{\epsilon}{|\epsilon|}}_{\substack{\epsilon\to 0\\ \to \pm 1}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \phi(z\epsilon)\,dz = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0} \phi(z\epsilon)}_{\phi(0)} dz = 2\pi\,\phi(0)$$

4/4

c)
$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{F}[g_\epsilon \mathcal{F}[\psi]](-k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int dx\, e^{ikx} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2} \int dy\, e^{-ixy} \psi(y)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \iint dx\,dy\, e^{ix(k-y)} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2} \psi(y) \quad \text{Subst.: } z = y-k \Leftrightarrow \frac{dz}{dy} = 1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \iint dx\,dz\, e^{-ixz} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2} \psi(z+k) = \frac{1}{2\pi} \int dz\, \psi(z+k) \lim_{\epsilon\to 0} \int dx\, e^{-ixz} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dz\, \psi(z+k) \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{F}[g_\epsilon](z) = \frac{1}{2\pi} \int dz\, \psi(z+k)\, 2\pi\,\delta_0 = \int dz\, \psi(z+k)\,\delta_0$$

$$= \psi(k)$$

✓ 4/4

d) Offensichtlich gilt nach c): $\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{F}[g_\epsilon \mathcal{F}[\psi]](-k) = \psi(k)$

Außerdem gilt aber auch $\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{F}[g_\epsilon \mathcal{F}[\psi]](-k) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](-k)$,

indem man einfach den limes in das Integral zieht und direkt auswertet.

Außerdem gilt $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\psi]](k) = \psi(k) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](-k)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dx\, e^{ikx} \mathcal{F}[\psi](x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\psi](k) = \frac{1}{2\pi} \int dx\, e^{ikx} \psi(x), \text{ denn eindeutig !}$$ ✓

4/4

Darf man limes einfach reinziehen? Wieso darf man das beim vorigen Mal dann nicht?

Darf man eigentlich immer, wo meinst du darf man das nicht?

e) $D_x[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \phi(k)$

$$\left(\mathcal{F}[D_x][\phi] = D_x[\mathcal{F}[\phi](\cdot)] = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \mathcal{F}[\phi](k) \cdot \cancel{k} \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \cancel{k} \int e^{-iky} \phi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} \cancel{k}\, \phi(y)\, dk\, dy \right)$$

Wieso darf man nicht einfach so rechnen und muss nicht die Definition von $\mathcal{F}[G]$ für Distributionen nutzen?

Wir stellen aber auch fest, dass $\frac{1}{2\pi} D_x[\phi] = \mathcal{F}^{-1}[\phi](x)$ gilt. ✓

Demnach gilt: $\mathcal{F}[D_x[\phi]](x) \neq \mathcal{F}[2\pi \mathcal{F}^{-1}[\phi]](x)$

$$\neq 2\pi \phi(x) = 2\pi \delta_x[\phi]$$

3/4

$$\mathcal{F}[D_x[\phi]] = D_x[\mathcal{F}[\phi]]$$

$$= 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\phi]](x)$$

$$= 2\pi\, \phi(x)$$

muss man doch ... ?

Wann heißt $\delta_x = \delta_x[\phi]$ und wann heißt $\delta_x = \begin{cases} 1, x=0 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$?

Schreibweise kenne ich so nicht...

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}[D_x][\phi] = 2\pi \delta_x[\phi] \quad \forall \phi$$

das stimmt so nicht ganz.

Das ist als hättest du eine Funktion (sagen wir $f \in \mathcal{L}^2$) und schreibst

$$\underbrace{f}_{\in \mathcal{L}^2} = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

Funktion — Wert der Funktion an der Stelle x

Das stimmt also streng genommen nicht.

Ich weiß aber nicht ob das was mit deiner Frage zu tun hat..