Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

27.06.16 Theoretische Physik III Blatt 10

Marvin Zanke
Till Wenigmann
Florian Strachwitz

1a	1b	1c	2a	2b	2c	Σ
4/4	4/4	3/3	4/4	3/3	2/2	20/20

sehr gut!

H1)

$$\vec{A}'(t,\vec{x}) = \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} f(t,\vec{x}) =$$

$$\phi'(t,\vec{x}) = \phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\partial_t f(t,\vec{x})$$

$$i\hbar\partial_t \psi(t,\vec{x}) = \left\{\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + e\phi(t,\vec{x})\right\}\psi(t,\vec{x})$$

Was heißt Ankopplung der Felder? Was passiert physikalisch?

a) z.z.: $\psi'(t,\vec{x}) = e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})$ erfüllt neue SGL mit $\vec{A}'$, ϕ'.

Dazu betrachten wir:

$$i\hbar\partial_t\psi'(t,\vec{x}) = \left\{\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}'(t,\vec{x})\right)^2 + e\phi'(t,\vec{x})\right\}\psi'(t,\vec{x})$$

$$\Leftrightarrow i\hbar\partial_t\left[e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right]$$

$$= \left\{\frac{1}{2m}\left(\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}'(t,\vec{x})^2 - \frac{e}{c}\vec{p}\vec{A}'(t,\vec{x}) - \frac{e}{c}\vec{A}'(t,\vec{x})\vec{p}\right) + e\left[\phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\partial_t f(t,\vec{x})\right]\right\}\left\{e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

Wie ist klar, auf was $\vec{\nabla}$ jetzt wirkt bzw. wann nur auf f, wann auf alles "rechts" von $\vec{\nabla}$?

aus dem Kontext :)

(frag mich nochmal mündlich. Zu viel zu schreiben :))

$$\Leftrightarrow i\hbar\left\{\underbrace{\frac{ie}{\hbar c}\dot{f}(t,\vec{x})e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})}_{(*)} + e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\dot{\psi}(t,\vec{x})\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2\Delta + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}'(t,\vec{x})^2 + \frac{ie\hbar}{c}\vec{\nabla}\vec{A}'(t,\vec{x}) + \frac{ie\hbar}{c}\vec{A}'(t,\vec{x})\vec{\nabla}\right) + e\phi(t,\vec{x}) \underbrace{- \frac{e}{c}\dot{f}(t,\vec{x})\Big\}\Big\{e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})}_{(**) = (*)}\Big\}$$

$$\Leftrightarrow i\hbar e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\dot{\psi}(t,\vec{x}) = \Big\{\frac{1}{2m}\Big(\underbrace{-\hbar^2\Delta}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^2}{c^2}\vec{A}'(t,\vec{x})^2}_{(2)} + \underbrace{\frac{2ie\hbar}{c}\vec{A}'(t,\vec{x})\vec{\nabla}}_{(3)} + \underbrace{\frac{ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\vec{A}'(t,\vec{x}))}_{(4)}\Big) + \underbrace{e\phi(t,\vec{x})}_{(5)}\Big\}\Big\{e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\Big\}$$ ✓

Gilt $\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f$?

nein

$$(1) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\left\{\frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

$$\overset{\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\Big\{\frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + \frac{ie}{\hbar c}\frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})$$
$$+ \frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})) + \frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})) + e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\vec{\nabla}^2\psi(t,\vec{x})$$

$$= -\frac{i\hbar e}{2mc}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + \frac{e^2}{2mc^2}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})$$
$$- \frac{i\hbar e}{mc}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(t,\vec{x})$$

$$(2) = \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}'(t,\vec{x})^2 \left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\} = \frac{e^2}{2mc^2}\left[\vec{A}(t,\vec{x})+\vec{\nabla}f(t,\vec{x})\right]^2 \left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

$$= \frac{e^2}{2mc^2}\left\{ \vec{A}(t,\vec{x})^2 + \vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}) + \vec{A}(t,\vec{x})\vec{\nabla}f(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}f(t,\vec{x})\vec{A}(t,\vec{x})\right\} \cdot \left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

$\vec{\nabla} f \vec{A}$: hier wirkt $\vec{\nabla}$ nur auf f oder wieso? ja s.o.

$$(3) = \frac{i\hbar e}{mc}\vec{A}'(t,\vec{x})\vec{\nabla}\left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\} = \frac{i\hbar e}{mc}\left[\vec{A}(t,\vec{x})+\vec{\nabla}f(t,\vec{x})\right]\vec{\nabla}\left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

$$= \frac{i\hbar e}{mc}\left[\vec{A}(t,\vec{x})+\vec{\nabla}f(t,\vec{x})\right]\left\{ \frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}))\right\}$$

$$= \frac{i\hbar e}{mc}\left\{ \vec{A}(t,\vec{x})\frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + \frac{ie}{\hbar c}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\, e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x}) + \vec{A}(t,\vec{x})e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})) + e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}))\right\}$$

$$(4) = \frac{i\hbar e}{2mc}(\vec{\nabla}\vec{A}'(t,\vec{x}))\left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\} = \frac{i\hbar e}{2mc}\left(\vec{\nabla}\left[\vec{A}(t,\vec{x})+\vec{\nabla}f(t,\vec{x})\right]\right)\left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

$$= \frac{i\hbar e}{2mc}\left\{ (\vec{\nabla}A(t,\vec{x})) + (\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\right\}\left\{ e^{\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})}\psi(t,\vec{x})\right\}$$

Was genau bringt uns das jetzt, dass SGL noch wie vor erfüllt? Kann man dann mit alter SGL weiterrechnen?

$$(5) = e\Phi(t,\vec{x})$$

$$\Rightarrow \left[(1)+(2)+(3)+(4)+(5)\right]\cdot e^{-\frac{ie}{\hbar c}f(t,\vec{x})} \quad \boxed{= i\hbar\dot{\psi}(t,\vec{x})}$$

$$= \frac{1}{2m}\Big\{ -\frac{i\hbar e}{c}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x}) + \frac{e^2}{c^2}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x}) - \frac{2i\hbar e}{c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}))$$
$$-\hbar^2(\vec{\nabla}^2\psi(t,\vec{x})) + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x})^2\psi(t,\vec{x}) + \frac{e^2}{c^2}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x}) + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x})(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x})$$
$$+\frac{e^2}{c^2}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))\vec{A}(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x}) - 2\frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x})(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x})$$
$$-2\frac{e^2}{c^2}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x}) + \frac{2i\hbar e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x})) + \frac{2i\hbar e}{c}(\vec{\nabla}f(t,\vec{x}))(\vec{\nabla}\psi(t,\vec{x}))$$
$$+\frac{i\hbar e}{c}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x}) + \frac{i\hbar e}{c}(\vec{\nabla}^2 f(t,\vec{x}))\psi(t,\vec{x})\Big\} + e\Phi(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})$$

$$= \left(\frac{1}{2m}\left\{ -\hbar^2\vec{\nabla}^2 + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x}) \underbrace{- \frac{2e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{p} - \frac{e}{c}(\vec{p}\vec{A}(t,\vec{x}))}_{\left(-\frac{e}{c}\vec{A}\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{p}\vec{A}\right)\psi,\ \text{da } \vec{p} \text{ so auf beides wirkt}}\right\} + e\Phi(t,\vec{x})\right)\psi(t,\vec{x})$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + e\Phi(t,\vec{x})\right)\psi(t,\vec{x})}$$

Die SGL ist also nach wie vor erfüllt ▽.

✓ 4/4

b) Analog zur Vorlesung suchen wir hier ein $\vec{j}$, s.d. $\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\vec{j}(t,\vec{x})$

(damit: andere SGL)

Dazu betrachten wir folgendes:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \dot{\psi}^*\psi + \psi^*\dot{\psi} \quad (1)$$

Außerdem gilt die SGL: $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$ mit $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + e\phi(t,\vec{x})$

$$\Leftrightarrow \dot{\psi} = \frac{H}{i\hbar}\psi$$

$$\Leftrightarrow \dot{\psi}^* = \frac{H^*}{-i\hbar}\psi^*$$

* ϕ und $\vec{A}$ sind die ganz normalen el.-mag. Potentiale, die du schon aus Theo II kennst ($\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$). Die waren schon immer und sind immer noch reell!

Damit wird (1) zu:

Kommutiert $H^*\psi^*$ mit ψ? Also $(H^*\psi^*)\psi = \psi(H^*\psi^*)$? ja (nur Zahlen)

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \left(-\frac{H^*}{i\hbar}\psi^*\right)\psi + \psi^*\left(\frac{H}{i\hbar}\psi\right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\{\psi^*\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + e\phi(t,\vec{x})\right]\psi - \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\right)^{*2} + e\phi^*(t,\vec{x})\right]\psi^*\psi\right\}$$

Ist $\vec{A}$ reell? ϕ reell? ja* ψ reell? nein. Wieso?

$\vec{p}^* = -\vec{p}$, $\vec{p}^{2*} = \vec{p}^2$

$$= \frac{1}{2mi\hbar}\left\{\psi^*\left[\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x})^2 - \frac{e}{c}\vec{p}\vec{A}(t,\vec{x}) - \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{p}\right]\psi - \left[\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x})^2 + \frac{e}{c}\vec{p}\vec{A}(t,\vec{x}) + \frac{e}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{p}\right]\psi^*\psi\right\}$$

$$= \frac{1}{2mi\hbar}\left\{\psi^*\left[-\hbar^2\Delta + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x}) + \frac{ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x})) + \frac{2ie\hbar}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{\nabla}\right]\psi\right) - \left(\left[-\hbar^2\Delta + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}(t,\vec{x}) - \frac{ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x})) - \frac{2ie\hbar}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{\nabla}\right]\psi^*\right)\psi\right\}$$

kommutieren die Wellenfkt. ψ^*, ψ mit $\vec{A}$, $\vec{\nabla}\vec{A}$ etc.? Also $\psi^*\vec{A}\psi = \vec{A}\psi^*\psi$ oder $\psi^* e\phi\psi = e\phi\psi^*\psi$ (dann benutzt)? ja (nur Zahlen)

$$= \frac{1}{2mi\hbar}\left\{-\hbar^2\psi^*(\Delta\psi) + \hbar^2(\Delta\psi^*)\psi + \frac{2ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}))\psi^*\psi + \frac{2ie\hbar}{c}\vec{A}(t,\vec{x})\psi^*(\vec{\nabla}\psi) + \frac{2ie\hbar}{c}\vec{A}(t,\vec{x})(\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left\{\psi^*(\Delta\psi) - (\Delta\psi^*)\psi\right\} + \frac{e}{mc}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}))\psi^*\psi + \frac{e}{mc}\vec{A}(t,\vec{x})\left\{\psi^*(\vec{\nabla}\psi) + (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla}\left\{\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right\} + \frac{e}{mc}(\vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}))\psi^*\psi + \frac{e}{mc}\vec{A}(t,\vec{x})\vec{\nabla}\left\{\psi^*\psi\right\}$$

$$= \vec{\nabla}\underbrace{\left\{\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right] + \frac{e}{mc}\vec{A}\psi^*\psi\right\}}_{\stackrel{!}{=} -\vec{j}(t,\vec{x})}$$

Wo sollte/musste man jetzt explizit die Kontinuitätsgleichung „benutzen"? im Sinne von $-\nabla j = \dot{\rho}$

4/4

c)

$$\vec{A}'(t,\vec{x}) = \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} f(t,\vec{x}) \quad , \quad \Psi'(t,\vec{x}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} f(t,\vec{x})} \Psi(t,\vec{x})$$

$$\Phi'(t,\vec{x}) = \Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c} \partial_t f(t,\vec{x})$$ ← kommt im Wahrscheinlichkeitsstrom nicht vor?

$$\vec{j}'(t,\vec{x}) = \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Psi'^* (\vec{\nabla} \Psi') - (\vec{\nabla} \Psi'^*) \Psi' \right\} + \frac{e}{mc} [\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} f(t,\vec{x})] \Psi'^* \Psi'$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left\{ e^{-\frac{ie}{\hbar c} f^*(t,\vec{x})} \Psi^*(t,\vec{x}) \left(\frac{ie}{\hbar c} (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) e^{\frac{ie}{\hbar c} f(t,\vec{x})} \Psi(t,\vec{x}) + e^{\frac{ie}{\hbar c} f(t,\vec{x})} \vec{\nabla} \Psi(t,\vec{x}) \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{-ie}{\hbar c} (\vec{\nabla} f^*(t,\vec{x})) e^{-\frac{ie}{\hbar c} f^*(t,\vec{x})} \Psi^*(t,\vec{x}) + e^{-\frac{ie}{\hbar c} f^*(t,\vec{x})} (\vec{\nabla} \Psi^*(t,\vec{x})) \right) e^{\frac{ie}{\hbar c} f(t,\vec{x})} \Psi(t,\vec{x}) \right\}$$
$$+ \frac{e}{mc} [\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} f(t,\vec{x})] e^{-\frac{ie}{\hbar c} f^*(t,\vec{x})} \Psi^*(t,\vec{x}) e^{\frac{ie}{\hbar c} f(t,\vec{x})} \Psi(t,\vec{x})$$

Ist f reell?

ja

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Psi^*(t,\vec{x}) \left(\frac{ie}{\hbar c} (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) \Psi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} \Psi(t,\vec{x}) \right) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{-ie}{\hbar c} (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) \Psi^*(t,\vec{x}) + (\vec{\nabla} \Psi^*(t,\vec{x})) \right) \Psi(t,\vec{x}) \right\}$$
$$+ \frac{e}{mc} [\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} f(t,\vec{x})] \Psi^*(t,\vec{x}) \Psi(t,\vec{x})$$

$$= \underline{-\frac{e}{2mc} \Psi^*(t,\vec{x}) (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) \Psi(t,\vec{x})} + \frac{i\hbar}{2m} \Psi^*(t,\vec{x}) (\vec{\nabla} \Psi(t,\vec{x}))$$
$$\underline{- \frac{e}{2mc} (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) \Psi^*(t,\vec{x}) \Psi(t,\vec{x})} - \frac{i\hbar}{2m} (\vec{\nabla} \Psi^*(t,\vec{x})) \Psi(t,\vec{x})$$
$$+ \frac{e}{mc} \vec{A}(t,\vec{x}) \Psi^*(t,\vec{x}) \Psi(t,\vec{x}) + \underline{\frac{e}{mc} (\vec{\nabla} f(t,\vec{x})) \Psi^*(t,\vec{x}) \Psi(t,\vec{x})}$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Psi^*(t,\vec{x}) (\vec{\nabla} \Psi(t,\vec{x})) - (\vec{\nabla} \Psi^*(t,\vec{x})) \Psi(t,\vec{x}) \right\}$$
$$+ \frac{e}{mc} \vec{A}(t,\vec{x}) \Psi^*(t,\vec{x}) \Psi(t,\vec{x})$$

$$= j(t,\vec{x})$$ ✓

Ist invariant unter den Transformationen. ✓

(wer hätte es bei der Überschrift „Eichinvarianz" nur geahnt…)

3/3

H2)

Gilt diese Restriktion nur zwischen 2-Teilchen System oder zwischen 2 Nukleonen im Vielteilchensystem?

nur 2-Teilchen

Was heißt hier "durch $^3S_1$-Zustand beschrieben"?

Dass sich das System insgesamt im Zustand $^3S_1$ befindet.

* Wir wissen ja, dass die Gesamtwellenfunktion $\Psi = \psi \chi^1$ ist. χ^1 kennen wir schon und müssen nur noch ψ bestimmen, das eben diese Gleichung genügt. (siehe auch Zusatzaufgabe)
$H\psi = E\psi$

Warum können wir jetzt diesen Hamiltonian benutzen und nicht H_{pn}?
*

a) $$\langle \psi_\beta | H | \psi_\beta \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \psi_\beta^*(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(|\vec{x}|)\right) \psi_\beta(\vec{x})$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\beta^3}{8\pi a^3} e^{-\frac{\beta|\vec{x}|}{2a}} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\right) e^{-\frac{\beta|\vec{x}|}{2a}}}_{(1)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\beta^3}{8\pi a^3} e^{-\frac{\beta|\vec{x}|}{2a}} \left(-V_0 \frac{e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}}}{\frac{|\vec{x}|}{a}}\right) e^{-\frac{\beta|\vec{x}|}{2a}}}_{(2)}$$

Δ in Kugelkoordinaten: $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$

Mit $f = e^{-\frac{\beta|\vec{x}|}{2a}} = e^{-\frac{\beta r}{2a}}$ folgt $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \left(-\frac{\beta}{2a}\right) e^{-\frac{\beta r}{2a}}\right)$

$$= -\frac{\beta}{2ar^2}\left\{2re^{-\frac{\beta r}{2a}} - \frac{\beta}{2a} r^2 e^{-\frac{\beta r}{2a}}\right\}$$

$$(1) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\beta^3}{8\pi a^3} 4\pi \int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{2a}} \left(-\frac{\beta}{2ar^2}\left\{2re^{-\frac{\beta r}{2a}} - \frac{\beta}{2a} r^2 e^{-\frac{\beta r}{2a}}\right\}\right) r^2$$

↑ Funktionaldeterminante

$$= -\frac{\hbar^2\beta^3}{4\mu a^3}\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{a}}\left(2r - \frac{\beta}{2a}r^2\right)$$

$$= \frac{\hbar^2\beta^4}{8\mu a^4}\int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{a}}\left(2r - \frac{\beta}{2a}r^2\right)$$

$$= \frac{\hbar^2\beta^4}{4\mu a^4}\int_0^\infty dr \, r e^{-\frac{\beta r}{a}} - \frac{\hbar^2\beta^5}{4\mu a^5}\int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{a}} r^2$$

$$= \frac{\hbar^2\beta^4}{4\mu a^4}\int_0^\infty dr \frac{a}{\beta} e^{-\frac{\beta r}{a}} - \frac{\hbar^2\beta^5}{16\mu a^5}\int_0^\infty dr \frac{2a^2}{\beta^2} e^{-\frac{\beta r}{a}} = \frac{\hbar^2\beta^4}{4\mu a^4}\left(-\frac{a^2}{\beta^2} e^{-\frac{\beta r}{a}}\right)\Big|_0^\infty - \frac{\hbar^2\beta^5}{16\mu a^5}\left[\frac{2a^3}{\beta^3} e^{-\frac{\beta r}{a}}\right]$$

$$= \frac{\hbar^2\beta^2}{4\mu a^2} - \frac{\hbar^2\beta^2}{8\mu a^2} = \frac{\hbar^2\beta^2}{8\mu a^2} \checkmark$$

$$(2) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \frac{\beta^3}{8\pi a^3} e^{-\frac{\beta|x|}{2a}} \left(-V_0 \frac{e^{-\frac{|x|}{a}}}{\frac{|x|}{a}} \right) e^{-\frac{\beta|x|}{2a}}$$

$$= -\frac{V_0 \beta^3}{8\pi a^3} 4\pi \int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{2a}} \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r/a} e^{-\frac{\beta r}{2a}} r^2 = -\frac{V_0 \beta^3}{8\pi a^3} a \int_0^\infty dr \, e^{-\frac{\beta r}{a}} e^{-\frac{r}{a}} r$$

$$= -\frac{V_0 \beta^3}{2a^2} \int_0^\infty dr \, r \, e^{-\frac{r}{a}(\beta+1)} \qquad z := \frac{r}{a}(\beta+1) \Rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\beta+1}{a}$$

$$= -\frac{V_0 \beta^3}{2a^2} \int_0^\infty dz \frac{a}{\beta+1} \frac{a}{\beta+1} z \, e^{-z}$$

$$= -\frac{V_0 \beta^3}{2(\beta+1)^2} \int_0^\infty dz \, z e^{-z} = -\frac{V_0 \beta^3}{2(\beta+1)^2} \int_0^\infty e^{-z} = -\frac{1}{2} V_0 \frac{\beta^3}{(\beta+1)^2}$$

✓

4/4

Warum „optimaler Wert"?*

b) Ritz'sches Variationsprinzip:

* Hm, vielleicht optimal für eine obere Schranke?

$$E(\bar\beta) = \frac{\hbar^2\bar\beta^2}{8\mu a^2} - \frac{1}{2}V_0\frac{\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^2}, \text{ da } \langle\psi_\beta|\psi_\beta\rangle = 1 \text{ normiert}$$

ist unser ψ_β nicht bereits der Variationsansatz $\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$?
Verstehe Frage nicht

$$\frac{\partial E}{\partial\bar\beta} = \frac{2\hbar^2\bar\beta}{8\mu a^2} - \frac{1}{2}V_0\frac{3\bar\beta^2(1+\bar\beta)^2 - 2(1+\bar\beta)\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^4} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\hbar^2\bar\beta}{8\mu a^2} = \frac{1}{2}V_0\frac{3\bar\beta^2(1+\bar\beta) - 2\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2\bar\beta}{2\mu a^2} = V_0\frac{3\bar\beta^2(1+\bar\beta) - 2\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^3}$$

ist obere Schranke, aber für variablen Parameter β und nicht bestimmte Wellenfkt? Was bringt das?

$$\Leftrightarrow \frac{(\bar\beta+1)^3}{\bar\beta} = V_0\frac{2\mu a^2}{\hbar^2}\,\frac{3(\bar\beta+1)-2\bar\beta}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\bar\beta+1)^3}{\bar\beta(\bar\beta+3)} = \frac{2V_0\mu a^2}{\hbar^2} = \frac{2\mu c^2 V_0 a^2}{\hbar^2 c^2} =: \alpha \quad ✓ \quad 3/2$$

Verstehe Frage wieder nicht... Mit $\bar\beta$ haben wir jetzt die Wellenfunktion, die uns die kleinste obere Schranke liefert...

c)
$$\langle\psi_{\bar\beta}|H|\psi_{\bar\beta}\rangle = \frac{\hbar^2\bar\beta^2}{8\mu a^2} - \frac{1}{2}V_0\frac{\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^2} = \frac{\bar\beta^3(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3}\left\{\overbrace{\frac{(1+\bar\beta)^3}{\bar\beta(\bar\beta-1)}}^{\alpha\frac{(\bar\beta+3)}{(\bar\beta-1)}}\frac{\hbar^2}{8\mu a^2} - \frac{1}{2}V_0\frac{(1+\bar\beta)}{(\bar\beta-1)}\right\}$$

Ein bischen ?? ohne das Ergebnis und damit diese Ausklammerung zu kennen? ?

$$= \frac{\bar\beta^3(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3}\left\{\frac{1}{(\bar\beta-1)}\left[\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}(\bar\beta+3)\frac{\hbar^2}{8\mu a^2} - \frac{1}{2}V_0(1+\bar\beta)\right]\right\}$$

$$= \frac{\bar\beta^3}{(1+\bar\beta)^3}\left\{\frac{1}{4}V_0(\bar\beta+3) - \frac{1}{2}V_0(\bar\beta+1)\right\} = \frac{\bar\beta^3 V_0}{(1+\bar\beta)^3}\left\{-\frac{1}{4}\bar\beta + \frac{1}{4}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}V_0\frac{\bar\beta^3(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3} \quad ✓$$

$$\hbar c = 200\,\mathrm{MeV}, \quad M_p c^2 \approx M_n c^2 \approx 1000\,\mathrm{MeV} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} = 500\,\mathrm{MeV}$$

„in dieser Näherung" – wo haben wir denn genähert?
Der Variationsansatz.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\cdot 500\,\mathrm{MeV}\,V_0 a^2}{40000\,\mathrm{MeV}^2} = \frac{1}{40\,\mathrm{MeV}}V_0 a^2 \quad (*)$$

$$E<0,\ V_0>0: \ -\frac{1}{4}V_0\frac{\bar\beta^3(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3} < 0 \Leftrightarrow \frac{\bar\beta^3(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{\bar\beta(\bar\beta-1)}{(1+\bar\beta)^3} > 0$$

Aufpassen bei Umformungen wegen negativen Zahlen?

$$\Leftrightarrow \frac{\bar\beta(\bar\beta+3) - 4\bar\beta}{(1+\bar\beta)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{\bar\beta(\bar\beta+3)}{(1+\bar\beta)^3} > \frac{4\bar\beta}{(1+\bar\beta)^3} \Leftrightarrow \bar\beta+3 > 4 \Leftrightarrow \bar\beta > 1 \quad ✓$$

$$\Rightarrow \alpha = \left.\frac{(\bar\beta+1)^3}{\bar\beta(\bar\beta+3)}\right|_{\bar\beta=1} \geq \frac{8}{4} = 2 \ ✓ \overset{(*)}{\Rightarrow} V_0 a^2 > 80\,\mathrm{MeV\,fm}^2 \quad ✓ \quad 2/2$$

Wie α für $\bar\beta > 1$ und nicht $\bar\beta = 1$? ?

Z1)

a) $\vec{S} = \vec{s}^{(p)} \otimes \mathbb{1}^{(n)} + \mathbb{1}^{(p)} \otimes \vec{s}^{(n)}$

$H_{pn} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right) V(|\vec{x}|)$

Δ macht nichts auf Spin?

$[H_{pn}, \vec{S}_k] = \left[\left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right) V(|\vec{x}|), \left(\vec{S}_k^{(p)} \otimes \mathbb{1}_k^{(n)} + \mathbb{1}_k^{(p)} \otimes \vec{S}_k^{(n)}\right)\right]$

$= \cancel{\left[\sum_{i=1}^{3} \left(\sigma_k^{(p)} \otimes \sigma_k^{(n)}\right) V(|\vec{x}|), \left(S_k^{(p)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}_k^{(p)} \otimes S_k^{(n)}\right)\right]}$

V(|x|) davor ziehen?

$= \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right) V(|\vec{x}|), S_k^{(p)} \otimes \mathbb{1}_k^{(n)}\right]$
$+ \left[\left(\sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right) V(|\vec{x}|), \mathbb{1}_k^{(p)} \otimes S_k^{(n)}\right]$

$|\psi\rangle = \sum_\sigma \int d^3r\, \psi_\sigma(\vec{r}) |\vec{r}\rangle |\sigma\rangle$

was ist das

$= V(|\vec{x}|) \sum_{i=1}^{3} \frac{\hbar}{2} 2i\epsilon_{ikl}\, \sigma_l^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}$
$+ \frac{\hbar}{2} 2i\epsilon_{ikl}\, \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_l^{(n)}$

0/0 Punkte

Siehe nächste Seite

2)
$$H_{pn} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + \left(\sum \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right) V(|\vec{x}|)$$

a) $\vec{S} := \vec{s}^{(p)} \otimes \mathbb{1}^{(n)} + \mathbb{1}^{(p)} \otimes \vec{s}^{(n)}$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right), S_j\right]$$

$$= \frac{4}{\hbar^2}\left[\left(\sum s_i^{(p)} \otimes s_i^{(n)}\right), S_j^{(p)} \otimes \mathbb{1}^{(n)} + \mathbb{1}^{p} \otimes s_i^{(n)}\right]$$

$$= \frac{4}{\hbar^2} \sum_{i=1}^{3} \left\{ [s_i^{(p)}, s_j^{(n)}] \otimes s_i^{(n)} + s_i^{(p)} \otimes [s_i^{(n)}, s_j^{(n)}] \right\}$$

$$= \frac{4}{\hbar^2} \sum_i \left\{ i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \left(s_k^{(p)} s_i^{(n)} + s_i^{(p)} s_k^{(n)}\right) \right\}$$

$$= \frac{4}{\hbar^2} \sum_i \left\{ i\hbar \sum_k \left(\epsilon_{ijk} s_k^{(p)} s_i^{(n)} + \epsilon_{kji} s_k^{(p)} s_i^{(n)}\right) \right\}$$

$$= \frac{4}{\hbar^2} \sum_i \left\{ i\hbar \sum_k \left(\epsilon_{ijk} s_k^{(p)} s_i^{(n)} - \epsilon_{ijk} s_k^{(p)} s_i^{(n)}\right) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow [H_{pn}, |\vec{S}|^2] = 0 \Rightarrow \Psi = \psi(\vec{x}) \chi^1, \; |\vec{S}|^2 \chi^1 = 2\hbar^2 \chi^1$$

b) $\tilde{\Psi} = \phi(\vec{x}) \chi^1$

EW-Glg.: $H_{pn} \tilde{\Psi} = E \tilde{\Psi}$

$$\frac{4}{\hbar^2} |\vec{S}|^2 = \sum_i \left(\sigma_i^{(p)} \otimes \mathbb{1}^{(n)} + \mathbb{1}^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right)\left(\sigma_i^{(p)} \otimes \mathbb{1}^{(n)} + \mathbb{1}^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}\right)$$

$$= \sum_i \left((\sigma_i^{(p)})^2 \otimes \mathbb{1}^{(n)} + 2\sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)} + \mathbb{1}^{(p)} \otimes (\sigma_i^{(n)})^2 \right)$$

$$= 6\mathbb{1} + 2\sum \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)} = -3\mathbb{1} + \frac{2}{\hbar^2} |\vec{S}|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)} V(|\vec{x}|) \phi(\vec{x}) \chi^0 = \left(-3 + \frac{2}{\hbar^2} \cdot 0\right) V(|\vec{x}|) \phi(\vec{x}) \chi^0$$

$$= -3\phi(\vec{x}) V(|\vec{x}|) \chi^0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta - 3V(|\vec{x}|)\right) \phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x})$$

Nach für $\psi = \phi(\vec{x})\chi^1$

$$\sum_i \sigma_i^{(p)} \otimes \sigma_i^{(n)} V(|\vec{x}|)\,\phi\,\chi^1 = \left(-3 + \frac{2}{\hbar^2}\, 2\hbar^2\right) V(|\vec{x}|)\,\phi\,\chi^1$$

$$= \psi(\vec{x})\, V(|\vec{x}|)\,\chi^1$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(|\vec{x}|)\right)\phi = E\phi$$

Da in diesem Fall repulsiv mit $V_0 > 0$ $\Rightarrow$ keine Bindungszustände