Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

15.07.16 Theoretische Physik III Blatt 12 Marvin Zanke

H1)

$$\hat{H}(t) = \underbrace{\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} + \hat{V}}_{\hat{H}_0} \underbrace{+ \hat{H}_\omega e^{-i\omega t} + \hat{H}_\omega^+ e^{i\omega t}}_{H_1(t)}$$

a	b	c	Σ
2/2	2/8	2/10	6/20

mit $\hat{H}_\omega = -\frac{e}{m_e c} a (\vec{e}\cdot\vec{p}) e^{i\vec{k}\vec{x}}$

Hat das einen phys. Sinn dass nach $\hat{H}_\omega e^{-i\omega t}$ und $\hat{H}_\omega e^{i\omega t}$ für eine Zeitabh. Störung braucht oder rein mathematisch?

a) $|n\rangle = |n\, l\, m\rangle$ und $|n'\rangle = |n'\, l'\, m'\rangle$

wie gehabt, denn $\hat{H}_0$ ist unser ungestörter Hamiltonian. In diesem „System" kommutieren nun mal H_0, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_3$ und deren Eigenwerte sind n, l, m bzw deren EZ $|n\rangle, |l\rangle, |m\rangle$ ein vollständiges ONS. ✓

2/2

„System" oder wie sagt man lieber?

Ist $|n\rangle$ der EW/EZ von H?

ja, $|n\rangle$ ist EZ zu H zum EW E_n.

b) $[\hat{L}_3, \hat{x}_3] = -i\hbar [\epsilon_{ij3} x_i \partial_j, \hat{x}_3] = -i\hbar \{(x_1\partial_2 - x_2\partial_1) x_3 - x_3(x_1\partial_2 - x_2\partial_1)\}$

$= -i\hbar \{x_1 x_3 \partial_2 - x_2 x_3 \partial_1 - x_3 x_1 \partial_2 + x_3 x_2 \partial_1\} = 0$ ✓

$[\hat{L}_3, \hat{x}_\pm] = [\hat{L}_3, \hat{x}_1] \pm i [L_3, x_2]$

$= -i\hbar [x_1\partial_2 - x_2\partial_1, x_1] \pm \hbar [x_1\partial_2 - x_2\partial_1, x_2]$

$= -i\hbar \{x_1\partial_2 x_1 - x_2 - x_2 x_1 \partial_1 - x_1 x_1 \partial_2 + x_1 x_2 \partial_1\}$

$\pm \hbar \{x_1 + x_1 x_2 \partial_2 - x_2 x_2 \partial_1 - x_2 x_1 \partial_2 + x_2 x_2 \partial_1\}$

$= i\hbar x_2 \pm \hbar x_1 = \pm\hbar (x_1 \pm i x_2)$ ✓

Wie folgert man jetzt $\Delta m \in \{-1, 0, 1\}$? Ansatz? ⇝

zeig ich in der Übung

2/8

c) $[\hat{L}^2, [\hat{L}^2, \hat{x}_i]] = [\hat{L}^2, [\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2, \hat{x}_i]]$ (*)

$$[\hat{L}_j^2, x_i] = \hat{L}_j[\hat{L}_j, \hat{x}_i] + [\hat{L}_j, \hat{x}_i]\hat{L}_j \overset{\text{Blatt 6, A2 b}}{=} L_j\, i\hbar\, \epsilon_{jik} x_k + i\hbar \epsilon_{jik} x_k L_j$$

$$= i\hbar \epsilon_{jik} \{L_j x_k + x_k L_j\} = -i\hbar \epsilon_{jki} \{L_j x_k + x_k L_j\} \checkmark$$

$$= -i\hbar \epsilon_{jki} \{L_j x_k + L_j x_k - i\hbar \epsilon_{jkl} x_l\} = -2i\hbar \epsilon_{jki} L_j x_k - 2\hbar^2 x_i$$

$$\Rightarrow [\hat{L}^2, x_i] = -2i\hbar \{\epsilon_{1ki} L_1 x_k + \epsilon_{2ki} L_2 x_k + \epsilon_{3ki} L_3 x_k\} - 6\hbar^2 x_i$$

$$= [\hat{\vec{L}} \times \vec{x}]_i - 6\hbar^2 x_i \quad \text{für } i \text{ beliebig}$$

$(L \times x)_i = \epsilon_{jki} L_j x_k$ kannt man ja als Identität

Habs für jedes i getestet? Wie kann man das schneller sehen mit dem Kreuzprodukt

$$\Rightarrow (*) = \underbrace{[\hat{L}^2, [\hat{L} \times x]_i]}_{=0,\ \text{weil Spatprodukt zyklisch}^*,\ \text{also}} - 6\hbar^2 [\hat{L}^2, x_i]$$

$$\hat{L}^2 [\hat{L} \times x] = x \cdot \hat{L}[\hat{L} \times \hat{L}] = 0$$

$$[\hat{L} \times x]\hat{L}^2 = [\hat{L}, \hat{L}] \times \cdot \hat{L} = 0$$

$$\Rightarrow (*) = -6\hbar^2 \hat{L}^2 x_i + 6\hbar^2 x_i \hat{L}^2 \mp 2\hbar^2 (x_i \hat{L}^2 + \hat{L}^2 x_i)$$

Wo kommt denn 6 her statt der 2? Und das "−" auf dem Blatt ist falsch oder?

* Ich denke da wir hier nicht kommutierende Sachen haben, kannst du das so nicht machen

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = b_i \epsilon_{ijk} c_j a_i$$

nur wenn $[a_i, b_j] = [a_i, c_k] = 0$

Folgern? Mir Ansatz? siehe Übung

2/10