Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

23.04.16 Theoretische Physik III Blatt 2

Marvin Zanke
Florian Stradwitz
Till Wenigmann

$\langle \psi, \psi \rangle \overset{?}{=} 1$

H1)

a) $\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = \langle y^2 + \langle y \rangle^2 - 2y \langle y \rangle \rangle$

$= \langle y^2 \rangle + \langle \langle y \rangle^2 \rangle - 2 \langle y \langle y \rangle \rangle$

$= \langle y^2 \rangle + \langle y \rangle^2 - 2 \langle y \rangle^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$ ✓

Reicht das, oder Integralschreibweise (also alles ausgeschrieben) besser?

Nö, super :)

Könnt ihr die 2b vorrechnen?

2/2

1a	1b	1c	2a	2b	Σ
2/2	6/6	6/6	3/3	3/3	20/20

sehr gut!

b)

$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \vec{x}^2\, \psi(\vec{x},t)}_{\int x^2 |\psi(x,t)|^2 d^3x} - \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \vec{x}\, \psi(\vec{x},t)}_{\int x |\psi(x,t)|^2 d^3x}\Big)^2$ ✓

Vektorpfeile oder keine Vektorpfeile? Also 1 dim oder 3 dim?

War hier ein-dim. gedacht.

$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$

$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}\right)^2 \psi(\vec{x},t) - \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t)\right)^2$

$= -\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \hbar^2 \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x},t) - \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t)\right)^2$

$= -\hbar^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x},t) + \hbar^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \psi^*(\vec{x},t)\, \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t)\right)^2$

6/6 ✓

c) $\langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle = \langle \alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) + \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t),$

$\alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) + \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

$= \langle \alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t), \alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

$+ \langle \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t), \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

$+ \langle \alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t), \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

$+ \langle \frac{i}{\hbar} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t), \alpha (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

Ist er selbstadj.?? klar

Der Erwartungswert ist eine Zahl.

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{x}, \langle \hat{x} \rangle, \hat{p}, \langle \hat{p} \rangle$ Selbstadjungiert

$= \alpha^2 \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \phi(\vec{x},t) \rangle - i^2 \frac{1}{\hbar^2} \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \phi(\vec{x},t) \rangle$

$+ \alpha i / \hbar \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

$- \frac{\alpha i}{\hbar} \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle$

Def $(\Delta x)^2, (\Delta p)^2$

$= \alpha^2 (\Delta x)^2 + \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2 + \frac{\alpha i}{\hbar} \{ \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle - \langle \phi(\vec{x},t), (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \phi(\vec{x},t) \rangle \}$

Im Folgenden interessieren wir uns für die Klammer:

$$\frac{\alpha i}{\hbar}\left\{\langle\phi(\vec{x},t),(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)\phi(\vec{x},t)\rangle-\langle\phi(\vec{x},t),(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)\phi(\vec{x},t)\rangle\right\}$$

$$=\frac{\alpha i}{\hbar}\left\{\langle\phi(\vec{x},t),(\hat{x}\hat{p}+\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle-\langle\hat{x}\rangle\hat{p}-\hat{x}\langle\hat{p}\rangle)\phi(\vec{x},t)\rangle-\langle\phi(\vec{x},t),(\hat{p}\hat{x}+\langle\hat{p}\rangle\langle\hat{x}\rangle-\langle\hat{p}\rangle\hat{x}-\hat{p}\langle\hat{x}\rangle)\phi(\vec{x},t)\rangle\right\}$$

$$=\frac{\alpha i}{\hbar}\left\{\langle\phi(\vec{x},t),\hat{x}\hat{p}\phi(\vec{x},t)\rangle-\langle\phi(\vec{x},t),\hat{p}\hat{x}\phi(\vec{x},t)\rangle\right\}$$, da sich der Rest wegkürzt,

wobei wir benutzt haben, dass $\langle\phi(\vec{x},t),\hat{p}\phi(\vec{x},t)\rangle=\langle\hat{p}\rangle$ und

$\langle\phi(\vec{x},t),\hat{x}\phi(\vec{x},t)\rangle=\langle\hat{x}\rangle$

sowie die Linearität des Skalarproduktes ausgenutzt haben.

2 Probleme:
• $[\hat{x},\hat{p}]$ ist 3 dim
was passiert jetzt hier ohne das δ_{ij}? Genau wie im Tutorium... $[\hat{x},\hat{p}]\overset{?}{=}-i\hbar$

$$=\frac{\alpha i}{\hbar}\left\{\langle\phi(\vec{x},t),[\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}]\phi(\vec{x},t)\rangle\right\}=\frac{\alpha i}{\hbar}\langle\phi(\vec{x},t),[\hat{x},\hat{p}]\phi(\vec{x},t)\rangle$$

$$\neq\frac{\alpha i}{\hbar}\langle\phi(\vec{x},t),i\hbar\delta_{ij}\phi(\vec{x},t)\rangle$$

$$=-\alpha\langle\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x},t)\rangle\overset{?}{=}-\alpha$$

ODER

$$=\frac{\alpha i}{\hbar}\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle=\frac{\alpha i}{\hbar}\langle+i\hbar\rangle\overset{?}{=}-\alpha$$ ✓

• Wieso sollte $\langle\phi,\phi\rangle=1$? Wer sagt dir, dass es normiert ist, bzw. wieso $\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle=-i\hbar\delta_{ij}$?

So wie die Aufgabe hier gestellt ist kann es sich nur um ein eindimensionales Problem handeln. Deswegen kommt auch Blödsinn raus, wenn du das drei-dim. versuchst. → Lass uns nochmal drüber reden. (schwer aufzuschreiben)

Deswegen gehen wir hier aus. Sonst müssten wir halt immer $\langle A\rangle=\frac{\langle\psi|A\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ für den Erwartungswert benutzen.

Damit folgt dann sofort, dass

$$Y:=\langle\psi_\alpha,\psi_\alpha\rangle=\underbrace{\alpha^2(\Delta x)^2+\frac{1}{\hbar^2}(\Delta p)^2-\alpha}_{\text{bereits auf voriger Seite gezeigt}}$$ ✓

Für das Minimum in α, bilden wir die Ableitung.

$$\frac{\partial Y}{\partial\alpha}=2\alpha(\Delta x)^2-1\overset{!}{=}0\iff\alpha_{min}=\frac{1}{2(\Delta x)^2}$$ ✓ Da es nur ein Extremum gibt, muss dieses das gesuchte Minimum sein.

$$\Rightarrow 0\leq Y(\alpha_{min})=\frac{1}{4(\Delta x)^4}(\Delta x)^2+\frac{1}{\hbar^2}(\Delta p)^2-\frac{1}{2(\Delta x)^2}$$

$$\iff\frac{1}{2(\Delta x)^2}\leq\frac{1}{4(\Delta x)^2}+\frac{1}{\hbar^2}(\Delta p)^2\iff\frac{\hbar^2}{2}\leq\frac{\hbar^2}{4}+(\Delta p)^2(\Delta x)^2$$

$$\iff\frac{\hbar^2}{4}\leq(\Delta p)^2(\Delta x)^2\iff(\Delta p)(\Delta x)\geq\frac{\hbar}{2}$$ ✓

Was passiert mit der zweiten Lösung beim Wurzelziehen?

6/6

H2)

a) $[\hat{A},\hat{B}]\psi = (\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\psi = \hat{A}\left(\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x')\right) - \hat{B}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x') - \int_{-\infty}^{x} dx' \underbrace{x'\, x'\frac{\partial}{\partial x'}\psi(x')}_{=\frac{\partial}{\partial x'}(x'^2\psi(x')) - \frac{\partial}{\partial x'}(x'^2)\psi(x')}$$

(*) Ich finde das was komisch: was ist, wenn ich Integral und Ableitung vertausche, dann fällt die - im Fall erst integrieren, dann ableiten - konstante Grenze ga nicht mehr weg?

Ich bin nicht sicher ob ich die Frage richtig verstehe. Beim ersten Hauptsatz $\frac{d}{dx}\int^{x} f(x')\,dx' = f(x)$ kannst du Integral und Ableitung nicht vertauschen.

$$= x\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x') - \int_{-\infty}^{x} dx' \left\{\frac{\partial}{\partial x'}(x'^2\psi(x')) - \frac{\partial}{\partial x'}(x'^2)\psi(x')\right\}$$

$$= \underbrace{x\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x')}_{= x\psi(x)\ (*)} - \underbrace{\left[x'^2\psi(x')\right]\Big|_{-\infty}^{x}}_{=x^2\psi(x)} + \int_{-\infty}^{x} 2(x')\,\psi(x')\,dx'$$

$=x^2\psi(x)$, denn $\psi(x)\xrightarrow{x\to-\infty}0$ schneller als jede Potenz von x ✓

$$= x^2\psi(x) - x^2\psi(x) + 2\int_{-\infty}^{x} x'\psi(x')\,dx'$$

$$= 2\int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x') = 2\hat{B}$$ ✓ 3/3

b) $\hat{B}\psi(x) = \lambda\psi(x)$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x') = \lambda\psi(x) \quad \Big| \frac{d}{dx}(\ldots)$

$\Leftrightarrow x\psi(x) = \lambda\psi'(x) \quad (*)$

Ansatz: $\psi(x) = e^{kx^2} \Rightarrow \psi'(x) = 2kxe^{kx^2}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow x\psi(x) = \lambda\cdot 2kx\psi(x)$

$x\neq 0$, $x=0$ ist aber trivial $\rightarrow$ $\Leftrightarrow 2\lambda k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2\lambda}$

$$\Rightarrow \psi(x) = C\cdot e^{\frac{x^2}{2\lambda}}$$

$\hat{B}\psi(x) = \lambda\psi(x) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} dx'\, x'\psi(x') = \lambda\psi(x)$

$\Leftrightarrow C\int_{-\infty}^{x} dx'\, x' e^{\frac{x'^2}{2\lambda}} = C\lambda e^{\frac{x^2}{2\lambda}}$

Damit linke Seite integrierbar ist, muss $\lambda<0$ gelten ☐ ✓ 3/3

(L^2 Funktion)