Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

Dieses Werk von Marvin Zanke ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

01.05.'16

Theoretische Physik III Blatt 3

Marvin Zanke
Till Wenigmann
Florian Graf Strachwitz

H1) $\boxed{I}$: Potential 0 im Bereich $-a \le x \le \epsilon$, ∞ für $x < -a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_I(\epsilon) = E\psi_I(\epsilon) \checkmark$$

Zieht das Argument mit den stehenden Wellen?

$\boxed{II}$: $-\epsilon \le x \le \epsilon$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(\epsilon)\right)\psi_{II}(\epsilon) = E\psi_{II}(\epsilon) \checkmark$$

Man kann die stationäre S.Gl. benutzen, weil sich zwischen den Wänden nur stehende Wellen ausbilden können. Dennoch kann die zeitl. Entwicklung der Welle gebraucht betrachtet werden.*

$\boxed{III}$: $\epsilon \le x \le a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{III}(\epsilon) = E\psi_{III}(\epsilon) \checkmark$$

Hm, irgendwie sehe ich das nicht so ganz. Stationäre SGL kann man ja nicht nur im Potentialtopf benutzen.

1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b	2c	2d
2/2	4/4	2/2	2/2	2/2	–/3*	–/2	–/3	–/1	–/2

Könnt ihr 1 c, d, e vorrechnen (Ich sag was zu den Sachen, die ihr nicht habt) gut!

Σ: 12/20+3*

LÖSUNG

$\boxed{I}$: Ansatz: $\psi_I(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \psi_I''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 \psi_I(x)$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 e^{\lambda x} = E e^{\lambda x} \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm ik$$

$$\Rightarrow \psi_I(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}$$

* Besser einfach sagen, dass das Potential zeitunabhängig ist und deswegen der Seperationsansatz funktioniert.

Mit Stetigkeitsbedingung $\psi_I(-a) = 0$ folgt:

Meint ihr das passt jetzt so mit dem Umdefinieren von A_1? ja, super

$$0 = Ae^{-ika} + Be^{ika} \Leftrightarrow A = -Be^{2ika}$$

$$\Rightarrow \psi_I(x) = -Be^{ik(x+2a)} + Be^{-ikx}$$

$$= e^{ika}\underbrace{\left(-Be^{ik(x+a)} + Be^{-ik(x+a)}\right)}_{-B\cdot 2i\cdot\sin(k(x+a))}$$

$$= \underbrace{-2Bie^{ika}}_{=:A_1}\sin(k(x+a)) \checkmark$$

$\boxed{II}$: Ansatz: $\psi_{II}(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \psi_{II}''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} = \lambda^2\psi_{II}(x)$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2\psi_{II}(x) = (E - V)\psi_{II}(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{2m(E-V)}{\hbar^2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} = \pm K$$

$$\Rightarrow \psi_{II}(x) = Be^{-Kx} + Ce^{Kx} \checkmark$$

III) Diesmal verifizieren wir nur mal durch einsetzen (geht analog zu ψ_I).

$$\psi_{III}(x) = A_2 \sin(k(x-a)) \Rightarrow \psi_{III}''(x) = -A_2 \sin(k(x-a)) \cdot k^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-A_2 \sin(k(x-a)) \cdot k^2\right) = E A_2 \sin(k(x-a))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \sin(k(x-a)) = E \sin(k(x-a))$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 2mE/\hbar^2 \quad \checkmark \text{ stimmt.} \checkmark$$

2/2

b) $\psi_I(-\epsilon) = \psi_{II}(-\epsilon)$, $\psi_I'(\epsilon) = \psi_{II}'(-\epsilon)$

$\psi_{II}(\epsilon) = \psi_{III}(\epsilon)$, $\underbrace{\psi_{II}'(\epsilon) = \psi_{III}'(\epsilon)}_{\text{Diese Stetigkeitsbed. gelten weil Potential endlich.}}$ ✓

$$\psi_I: A_1 \sin(k(-\epsilon+a)) = Be^{\kappa\epsilon} + Ce^{-\kappa\epsilon}$$
$$\psi_I': A_1 k \cos(k(-\epsilon+a)) = -B\kappa e^{\kappa\epsilon} + C\kappa e^{-\kappa\epsilon}$$

(1) $\frac{\psi_I'}{\psi_I}$

$$\psi_{III}: A_2 \sin(k(\epsilon-a)) = Be^{-\kappa\epsilon} + Ce^{\kappa\epsilon}$$
$$\psi_{III}': A_2 k \cos(k(\epsilon-a)) = -B\kappa e^{-\kappa\epsilon} + C\kappa e^{\kappa\epsilon}$$

(2) $\frac{\psi_{III}'}{\psi_{III}}$

$$(1) \Leftrightarrow k\cot(k\underbrace{(-\epsilon+a)}_{a-\epsilon}) = \frac{-B\kappa e^{\kappa\epsilon} + C\kappa e^{-\kappa\epsilon}}{Be^{\kappa\epsilon} + Ce^{-\kappa\epsilon}} = \kappa\frac{-Be^{2\kappa\epsilon} + C}{Be^{2\kappa\epsilon} + C} \checkmark$$

$$(2) \Leftrightarrow k\cot(k(\epsilon-a)) = \frac{-B\kappa e^{-\kappa\epsilon} + C\kappa e^{\kappa\epsilon}}{Be^{-\kappa\epsilon} + Ce^{\kappa\epsilon}} = -\kappa\frac{Be^{-\kappa\epsilon} - Ce^{\kappa\epsilon}}{Be^{-\kappa\epsilon} + Ce^{\kappa\epsilon}}$$

$$(= -k\cot(k(a-\epsilon)))$$

$$\Leftrightarrow k\cot(k(a-\epsilon)) = \kappa\frac{B - Ce^{2\kappa\epsilon}}{B + Ce^{2\kappa\epsilon}} \checkmark$$

(1)-(2):

$$0 = k\cot(k(-\epsilon+a)) - k\cot(k(a-\epsilon)) = \kappa\left\{\frac{-Be^{2\kappa\epsilon} + C}{Be^{2\kappa\epsilon} + C} - \frac{B - Ce^{2\kappa\epsilon}}{B + Ce^{2\kappa\epsilon}}\right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(-Be^{2\kappa\epsilon} + C)(B + Ce^{2\kappa\epsilon}) - (B - Ce^{2\kappa\epsilon})(Be^{2\kappa\epsilon} + C)}{(Be^{2\kappa\epsilon} + C)(B + Ce^{2\kappa\epsilon})}$$

$$= \frac{(-B^2e^{2\kappa\epsilon} + C^2e^{2\kappa\epsilon} - BCe^{4\kappa\epsilon} + CB) - (B^2e^{2\kappa\epsilon} - C^2e^{2\kappa\epsilon} - CBe^{4\kappa\epsilon} + BC)}{(Be^{2\kappa\epsilon} + C)(B + Ce^{2\kappa\epsilon})}$$

$$= \frac{-2B^2e^{2\kappa\epsilon} + 2C^2e^{2\kappa\epsilon}}{(Be^{2\kappa\epsilon} + C)(B + Ce^{2\kappa\epsilon})} \Leftrightarrow C^2 = B^2 \Leftrightarrow C = \pm B \checkmark$$

Nutzt man dies nun in den vorigen Gleichungen aus, so erhält man:

$$\psi_I : A_1 \sin(k(a-\epsilon)) = Be^{\kappa\epsilon} \pm Be^{-\kappa\epsilon}$$
$$\psi_{III} : -A_2 \sin(k(a-\epsilon)) = Be^{-\kappa\epsilon} \pm Be^{\kappa\epsilon}$$
$$\psi_I' : A_1 k\cos(k(a-\epsilon)) = -B\kappa e^{\kappa\epsilon} \pm B\kappa e^{-\kappa\epsilon}$$
$$\psi_{III}' : +A_2 k \cos(k(a-\epsilon)) = -B\kappa e^{-\kappa\epsilon} \pm B\kappa e^{\kappa\epsilon}$$

$\left.\right\} \frac{\psi_I}{\psi_{III}}$

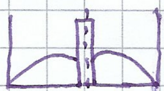
Warum genau zeigt jetzt $A_1 = -A_2$ "gerade" Parität? *

$$\Rightarrow -\frac{A_1}{A_2} = \frac{Be^{\kappa\epsilon} \pm Be^{-\kappa\epsilon}}{Be^{-\kappa\epsilon} \pm Be^{\kappa\epsilon}} = \pm \frac{Be^{\kappa\epsilon} \pm Be^{-\kappa\epsilon}}{\pm Be^{-\kappa\epsilon} + Be^{\kappa\epsilon}} = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow A_1 = \mp A_2 \checkmark$$

4/4

* Naja, wenn $A_1 = -A_2$, dann sehen die Lsgen ungefähr so aus:

z.B. 

oder so, also symmetrisch. Das siehst du auch, weil für $A_1 = -A_2$ $\psi_I = A_1 \sin k(x+a)$, $\psi_{II} = -A_1 \sin k(x-a)$ also $\psi_I(-x) = \psi_{II}(x) \Rightarrow \psi(-x) = \psi(x)$.
Entsprechend ist ψ in diesem Fall eine Eigenfunktion zum Paritätsoperator mit Eigenwert $+1$: $\Pi\psi(x) = \psi(-x) = \psi(x) = (+1)\cdot\psi(x)$

c) Wir entscheiden uns für Gleichung 1, im Prinzip ist es aber egal da das Selbe rauskommt.

$$k\cot(k(a-\epsilon)) = \kappa \frac{-Be^{2\kappa\epsilon} + C}{Be^{2\kappa\epsilon} + C}$$
$$\approx k\cot(ka)$$

$e^x \approx 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$
In erster Näherung

Wieso $\epsilon\kappa \to 0$ wenn $\epsilon \to 0$, $\kappa \to \infty$?
Das ist einfach nur der interessante Fall. Wenn $\epsilon\kappa$ endl. oder $\epsilon\kappa \to \infty$ hätten wir eine undurchl. Wand.
$\epsilon\kappa^2 = \Omega$?
wieso durch 1 undurchlässig für $\Omega \to \infty$, $\Omega \to 0$
Wir stellen ja später fest, dass $\psi(0) = 0$ genau für $\Omega \to \infty$, genau wie bei einer unendl. hohen Potentialwand. → Quasi zwei unabh. Potentialtöpfe.

$$\approx \kappa \frac{-B(1+2\kappa\epsilon) + C}{B(1+2\kappa\epsilon) + C} = \kappa \frac{-B(1+2\kappa\epsilon) \pm B}{B(1+2\kappa\epsilon) \pm B} \quad (*)$$

Gerade Parität:
$C = B$, denn $A_1 = -A_2$

$$(*) = \kappa \frac{-2B\kappa\epsilon}{2B + 2B\kappa\epsilon} = -\frac{2B}{2B}\frac{\kappa^2\epsilon}{1+\kappa\epsilon} = -\frac{\Omega}{1+\kappa\epsilon}$$
$$\approx -\Omega \checkmark$$

Ungerade Parität:
$C = -B$, denn $A_1 = A_2$

$$(*) = \kappa \frac{-2B - 2B\kappa\epsilon}{2B\kappa\epsilon} = -\frac{2B}{2B}\kappa \frac{1+\kappa\epsilon}{\kappa\epsilon}$$
$$= -\frac{1+\kappa\epsilon}{\epsilon} \approx -\frac{1}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \infty \checkmark$$

Wieso soll das nicht gehen?

Geht nicht, da
Was geht nicht?

Wieso verschwindet die ungerade Lsg bei $x = 0$?

d) ungerade Parität: $C = -B$, $A_1 = A_2$. Aus c): $\psi(0) = 0$, $\psi_I(0) = 0 = \psi_{III}(0)$ | ist das wirklich das, was bei c) gefolgert wird? ja ✓

$\psi_I = A \sin(k(x+a))$, $\psi_{III} = A \sin(k(x-a))$ $\Rightarrow \underline{ka = n\pi}$ ✓

$$1 = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} (|\psi_I|^2 + |\psi_{III}|^2)}_{\text{nicht so schreiben}} = A^2 \left\{ \int_{-a}^{0} \sin^2(k(x+a))\,dx + \int_{0}^{a} \sin^2(k(x-a))\,dx \right\}$$ ✓

$z_1 = k(x+a)$, $z_2 = k(x-a)$

$$= A^2 \left\{ \frac{1}{k} \Big[\underbrace{\frac{z_1 + \sin(z_1)\cos(z_1)}{2}}_{\frac{ka}{2},\ \text{denn } ka = n\pi} \Big] \Big|_0^{ka} + \frac{1}{k} \Big[\underbrace{\frac{z_2 + \sin(z_2)\cos(z_2)}{2}}_{\frac{ka}{2},\ \text{denn } ka = n\pi} \Big] \Big|_{-ka}^{0} \right\}$$

$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{a}$ ✓

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2} \quad \text{mit } k = \frac{n\pi}{a}$$ ✓

2/2

e) Aus c) wissen wir, dass im geraden Fall gilt:

$$\approx \quad k \cot(ka) = -\Omega$$

$\underline{\Omega \to 0}$: $\quad ka = \frac{\pi}{2} \cdot (2n-1) = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar\pi}{2a}(2n-1) = \sqrt{2mE}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\hbar^2\pi^2}{4a^2}(2n-1)^2 \frac{1}{2m}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}(2n-1)^2$$ ✓

$\underline{\Omega \to \infty}$: $\quad ka = n\pi = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar n\pi}{a} = \sqrt{2mE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2 n^2\pi^2}{2ma^2} = E$$ ✓

Für die Eigenfunktionen gilt mit Aufgabenteil A und $A_1 = -A_2$ für gerade Parität

Was ist mit $x = 0$? → Durchstetige Fortsetzung

$$\psi^+_{n,I} = A \sin(k_n^+(x+a)) \quad , -a \leq x < 0$$
$$\psi^+_{n,II} = -A \sin(k_n^+(x-a)) \quad 0 < x \leq a$$ ✓

Gelten diese EF nur für $\Omega \to 0$, $\Omega \to \infty$???

$\psi^+_n(-x) = \psi_n(x)$ trivialerweise

$$\underbrace{(n-\tfrac{1}{2})\pi < k_n^+ a < n\pi}_{\text{Periodizität}}$$

$(n-1/2)\pi < k_n^+ a < n\pi$?

$ak \cot(ka) = -a\Omega$

$\underline{\cot(ak)}$:

für $0 < \Omega < \infty$ muss sich ka also in den rosa Bereichen befinden

Wegen der Normierung stellt man schnell fest, dass

$$1 \overset{!}{=} \int_{-a}^{0} A^2 \sin^2(k_n^+(x+a))\,dx + \int_0^a A^2 \sin^2(k_n^+(x-a))\,dx \qquad z_1 = x+a, \; z_2 = x-a$$

$$= A^2 \left\{ \frac{1}{2k_n^+}\left[z - \sin(z)\cos(z)\right]\Big|_0^{k_n^+ a} + \frac{1}{2k_n^+}\left[z - \sin(z)\cos(z)\right]\Big|_{-k_n^+ a}^{0} \right\}$$

$$= \frac{A^2}{2k_n^+}\left\{ k_n^+ a - \sin(k_n^+ a)\cos(k_n^+ a) + k_n^+ a + \sin(-k_n^+ a)\cos(-k_n^+ a) \right\}$$

$$= \frac{A^2}{2k_n^+}\left\{2k_n^+ a - \left(\underbrace{\sin(k_n^+ a)\cos(k_n^+ a) + \sin(k_n^+ a)\cos(k_n^+ a)}_{\sin(2k_n^+ a)}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad A^2 = \frac{2k_n^+}{2k_n^+ a - \sin(2k_n^+ a)}$$ ✓

2/2

f)

25.07.2016 Nachtrag

H2)

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} \Omega \delta(x)$$

a) SGL

invariant unter Paritätstransf.

$$E\psi(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-1)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\Omega\delta(x)\psi$$

$$\psi''(x) + (k^2 - 2\Omega\delta(x'))\psi$$

$$\psi(x) = A\psi_+(x) + B\psi_-(x)$$

$$\psi(-x) = A\psi_+(x) - B\psi_-(x)$$

$$\psi(-x) = \alpha\psi(x), \quad \alpha = \text{const}$$

$$A\psi^-(x) - B\psi^-(x) = \alpha(A\psi^+(x) + B\psi^+(x))$$

$$\Rightarrow 1A = \alpha A$$

$$B = -\alpha B \rightarrow \alpha = 1, B = 0 \text{ oder } \alpha = -1, A = 0$$

$\Rightarrow \psi$ gerade oder ungerade da $\alpha \in \{\pm 1\}$

b) Integriere SGL in Umgebung vom Potential

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2\Omega\psi(0)$$

$$L(x) = \frac{\psi'}{\psi}$$

$$L(+0) - L(-0) = 2\Omega$$

c) ungerade Parität $\psi_n(0) = 0$ da $\psi_n^-(+0) = -\psi_n^-(-0)$

keine Diskontinuität der Ableitung an 0

$\Rightarrow$ stimmt mit H1 überein

d)

$$\psi_n'(x) = \begin{cases} -A\sin k_n^+(x+a), & -a \leq x < 0 \\ A\sin k_n^+(x-a), & 0 < x \leq +a \end{cases}$$

$$L(+0) = -k_n^+ \cot k_n^+ a$$

$$L(-0) = +k_n^+ \cot k_n^+ a$$

$$= k_n^+ \cot k_n^+ 0 = -\Omega$$