Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

09.05.2016 Theoretische Physik III Blatt 4

Marvin Zanke
Florian Stradwitz
Till Wenngmann

a) $E > V_0$: "freie" Gleichungen; das Teilchen streut an dem gegebenen Potential; kann sich zu "jeder" Zeit an "jedem" Ort aufhalten.

↳ schon, aber das beschreibt die Lösungen nicht so wirklich.

→ selbe Lagen wie Potentialtopf

Wirklich an jedem Ort? ja

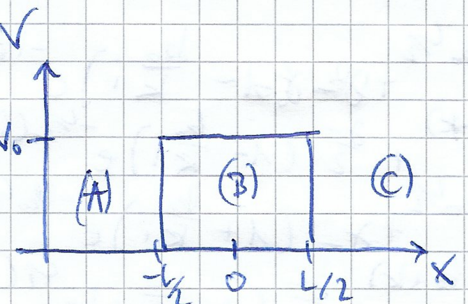
$E < 0$: Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo zu finden nimmt exponentiell ab. Wegen Anschlussbedingungen muss die Teilchenwelle deshalb überall verschwinden. ✓ gut 1/2

a	b	c	d	e	f	Σ
1/2	2/2	6/6	2/2	4/4	4/4	19 / 20

sehr gut!

Könnt ihr die b, c und d skizzieren? Also nicht jeden Schritt, aber so, dass jeder weiß was prinzipiell zu tun ist.

b)



SG:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t) = E\psi(x,t)$$

(A): $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_A(x,t) = E\psi_A(x,t)$

Ansatz: $\psi_A(x,t) = e^{\lambda x} \Rightarrow \psi_A''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 = E \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}_{\boxed{=: k_0(E)}}$

$\Rightarrow \psi_A(x,t) = \alpha_+ e^{ik_0 x} + \alpha_- e^{-ik_0 x}$ ✓

(B): $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_B(x,t) = (E - V_0)\psi_B(x,t)$

Ansatz: $\psi_B(x,t) = e^{\lambda x} \Rightarrow \psi_B''(x,t) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 = (E - V_0) \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \underbrace{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}_{\boxed{=: k(E)}}$

$\Rightarrow \psi_B(x,t) = \beta_+ e^{kx} + \beta_- e^{-kx}$ ✓

(C): $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_C(x,t) = E\psi_C(x,t)$

Lösung analog zu (A): $\psi_C(x,t) = \gamma_+ e^{ik_0 x} + \gamma_- e^{-ik_0 x}$ ✓

c) $\psi_A(-L/2) = \psi_B(-L/2)$, $\psi_A'(-L/2) = \psi_B'(-L/2)$ | (A), (B)

$\psi_B(L/2) = \psi_C(L/2)$, $\psi_B'(L/2) = \psi_C'(L/2)$ ✓ | (B), (C)

(A), (B):
$$\alpha_+ e^{-ik_0 L/2} + \alpha_- e^{ik_0 L/2} = \beta_+ e^{-kL/2} + \beta_- e^{kL/2}$$
$$ik_0 \alpha_+ e^{-ik_0 L/2} - ik_0 \alpha_- e^{ik_0 L/2} = k\beta_+ e^{-kL/2} - k\beta_- e^{kL/2} \qquad (1)$$

(B), (C):
$$\beta_+ e^{kL/2} + \beta_- e^{-kL/2} = \gamma_+ e^{ik_0 L/2} + \gamma_- e^{-ik_0 L/2}$$
$$k\beta_+ e^{kL/2} - k\beta_- e^{-kL/2} = ik_0\gamma_+ e^{ik_0 L/2} - ik_0\gamma_- e^{-ik_0 L/2} \qquad (2) \; (+),(-) \; ;k$$

---

(2): $2\beta_+ e^{kL/2} = \gamma_+\left(1+i\frac{k_0}{k}\right)e^{ik_0 L/2} + \gamma_-\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{-ik_0 L/2}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\beta_+} = \frac{\gamma_+}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{L/2(ik_0-k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{-L/2(ik_0+k)}$

und $2\beta_- e^{-kL/2} = \gamma_+\left(1-i\frac{k_0}{k}\right)e^{ik_0 L/2} + \gamma_-\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{-ik_0 L/2}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\beta_-} = \frac{\gamma_+}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{L/2(ik_0+k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{L/2(-ik_0+k)}$

✓

---

(1) $2\alpha_+ e^{-ik_0 L/2} = \beta_+\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)e^{-kL/2} + \beta_-\left(1-\frac{k}{ik_0}\right)e^{kL/2}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\alpha_+} = \frac{\beta_+}{2}\left(1-\frac{k}{k_0}i\right)e^{-L/2(-ik_0+k)} + \frac{\beta_-}{2}\left(1+\frac{k}{k_0}i\right)e^{L/2(ik_0+k)}$

und $2\alpha_- e^{ik_0 L/2} = \beta_+\left(1-\frac{k}{ik_0}\right)e^{-kL/2} + \beta_-\left(1+\frac{k}{ik_0}\right)e^{kL/2}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\alpha_-} = \frac{\beta_+}{2}\left(1+\frac{k}{k_0}i\right)e^{-L/2(ik_0+k)} + \frac{\beta_-}{2}\left(1-\frac{k}{k_0}i\right)e^{L/2(-ik_0+k)}$

✓

$$\Rightarrow \alpha_+ = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\gamma_+}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(ik_0-k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{-\frac{L}{2}(ik_0+k)}\right\}\left(1-\frac{k}{k_0}i\right)e^{-\frac{L}{2}(ik_0+k)}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{ \frac{\gamma_+}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(ik_0+k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(-ik_0+k)}\right\}\left(1+\frac{k}{k_0}i\right)e^{\frac{L}{2}(ik_0+k)}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{-L(k-ik_0)}\left(2-\frac{k}{k_0}i+\frac{k_0}{k}i\right)+\gamma_- e^{-Lk}\left(-\frac{k_0}{k}i-\frac{k}{k_0}i\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{L(k+ik_0)}\left(2-\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)+\gamma_- e^{Lk}\left(\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{-Lk}\left[e^{ik_0L}\left(2+\frac{k_0}{k}i-\frac{k}{k_0}i\right)\right]+\gamma_+ e^{Lk}\left[e^{ik_0L}\left(2+\frac{k}{k_0}i-\frac{k_0}{k}i\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\gamma_-\left(\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)\left(e^{Lk}-e^{-Lk}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{ik_0L}\left[2e^{Lk}+2e^{-Lk}+\left(\frac{k}{k_0}i-\frac{k_0}{k}i\right)\left(e^{Lk}-e^{-Lk}\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\gamma_- i\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\cdot 2\cdot\sinh(Lk)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{ik_0L}\left[4\cosh(Lk)+i\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\cdot 2\cdot\sinh(Lk)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{2}i\gamma_-\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\gamma_+ e^{ik_0L}\left(2\cosh(Lk)+i\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{2}i\gamma_-\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk)$$

$$= \gamma_+ e^{ik_0L}\cosh(Lk)+\frac{1}{2}i\gamma_+ e^{ik_0L}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)$$
$$+\frac{1}{2}i\gamma_-\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk) \quad ✓$$

$$\alpha_- = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\gamma_+}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(ik_0-k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{-\frac{L}{2}(ik_0+k)}\right\}\left(1+\frac{k}{k_0}i\right)e^{-\frac{L}{2}(ik_0+k)}$$
$$+\frac{1}{2}\left\{ \frac{\gamma_+}{2}\left(1-\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(ik_0+k)} + \frac{\gamma_-}{2}\left(1+\frac{k_0}{k}i\right)e^{\frac{L}{2}(-ik_0+k)}\right\}\left(1-\frac{k}{k_0}i\right)e^{\frac{L}{2}(-ik_0+k)}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{-Lk}\left(\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)+\gamma_- e^{-L(ik_0+k)}\left(2-\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\gamma_+ e^{Lk}\left(-\frac{k_0}{k}i-\frac{k}{k_0}i\right)+\gamma_- e^{L(-ik_0+k)}\left(2-\frac{k}{k_0}i+\frac{k_0}{k}i\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\gamma_+ i\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\left(e^{-Lk}-e^{Lk}\right)\right.$$
$$\left.+\gamma_- e^{-ik_0L}\left[e^{-Lk}\left(2-\frac{k_0}{k}i+\frac{k}{k_0}i\right)+e^{Lk}\left(2-\frac{k}{k_0}i+\frac{k_0}{k}i\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-2i\gamma_+\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk)\right.$$
$$\left.+\gamma_- e^{-ik_0L}\left[2e^{Lk}+2e^{-Lk}+i\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\left(e^{Lk}-e^{-Lk}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-2\gamma_+ i\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk)\right.$$
$$\left.+\gamma_- e^{-ik_0L}\left[4\cosh(Lk)+2i\left(\frac{k_0}{k}-\frac{k}{k_0}\right)\sinh(Lk)\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma_+ i\left(\frac{k_0}{K}+\frac{K}{k_0}\right)\sinh(LK) + \gamma_- e^{-ik_0L}\cosh(LK)$$
$$+\frac{1}{2}i\gamma_- e^{-ik_0L}\left(\frac{k_0}{K}-\frac{K}{k_0}\right)\sinh(LK)$$ ✓

6/6 schön

d) Wenn das Teilchen von links einläuft, so kann es im rechten Teil (C) nur einen transmittierten und keinen reflektierten Teil geben $\therefore \gamma_- = 0$ ✓

$$\Rightarrow \alpha_+ = \gamma_+ e^{ik_0L}\cosh(LK) + \frac{\gamma_+}{2} i e^{ik_0L}\left(\frac{K}{k_0}-\frac{k_0}{K}\right)\sinh(LK)$$ ✓
$$\alpha_- = -\frac{\gamma_+}{2} i\left(\frac{k_0}{K}+\frac{K}{k_0}\right)\sinh(LK)$$ ✓

2/2

Was ist hier mit dem Bereich in der Mitte?

✓ für den interessieren wir uns nicht

e) Hierfür rechnet man noch einmal für den Fluss nach:

$$j_{ein} = \frac{\hbar}{2mi}\left\{\psi^*\psi' - \psi\psi^{*\prime}\right\} = j_{trans} = j_{refl} \left(\begin{matrix}\text{mit entspr.}\\ \text{Wellenfkt.}\end{matrix}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2mi}\left\{(\alpha_+^* e^{-ik_0x})(ik_0\alpha_+ e^{ik_0x}) - (\alpha_+ e^{ik_0x})(-\alpha_+^* ik_0 e^{-ik_0x})\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2mi}\left\{ik_0|\alpha_+|^2 + ik_0|\alpha_+|^2\right\} = \frac{\hbar k_0}{m}|\alpha_+|^2$$

Egal ob bei $(\psi^*)'$ erst ableiten oder erst c.c.?

ja

$$j_{trans} = \frac{\hbar}{2mi}\left\{(\gamma_+^* e^{-ik_0x})(ik_0\gamma_+ e^{ik_0x}) - (\gamma_+ e^{ik_0x})(-ik_0\gamma_+^* e^{-ik_0x})\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2mi}\left\{ik_0|\gamma_+|^2 + ik_0|\gamma_+|^2\right\} = \frac{\hbar k_0}{m}|\gamma_+|^2$$

$$j_{refl} = \frac{\hbar}{2mi}\left\{(\alpha_-^* e^{ik_0x})(-\alpha_- ik_0 e^{-ik_0x}) - (\alpha_- e^{-ik_0x})(ik_0\alpha_-^* e^{ik_0x})\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2mi}\left\{-ik_0|\alpha_-|^2 - ik_0|\alpha_-|^2\right\} = -\frac{\hbar k_0}{m}|\alpha_-|^2$$

Nun setzt man die Definition vom Transmissionskoeffizient T bzw. Reflexionskoeffizient R ein und erhält:

$$T = \left|\frac{j_t}{j_{ein}}\right| = \left|\frac{\hbar k_0}{m}|\gamma_+|^2 \cdot \frac{m}{\hbar k_0}\frac{1}{|\alpha_+|^2}\right| = \frac{|\gamma_+|^2}{|\alpha_+|^2}$$

$$= \frac{|\gamma_+|^2}{\left|\gamma_+ e^{ik_0L}\cosh(Lk) + \frac{\gamma_+}{2} i e^{ik_0L}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)\right|^2}$$

$$= \frac{1}{\left|e^{ik_0L}\cosh(Lk) + \frac{1}{2} i e^{ik_0L}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)\right|^2}$$

$|e^{ik_0L}| = 1$

$$= \frac{1}{\cosh^2(Lk) + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)^2\sinh^2(Lk)} \quad ✓$$

$$R = \left|\frac{j_R}{j_{ein}}\right| = \left|-\frac{\hbar k_0}{m}|\alpha_-|^2 \frac{m}{\hbar k_0}\frac{1}{|\alpha_+|^2}\right| = \frac{|\alpha_-|^2}{|\alpha_+|^2}$$

$$= \frac{\frac{|\gamma_+|^2}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{\left|\gamma_+ e^{ik_0L}\cosh(Lk) + \frac{\gamma_+}{2} i e^{ik_0L}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)\right|^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{\left|\cosh(Lk) + \frac{1}{2} i \left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)\sinh(Lk)\right|^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{\cosh^2(Lk) + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)^2\sinh^2(Lk)} \quad ✓$$

$$\Rightarrow R+T = \frac{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{\cosh^2(Lk) + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)^2\sinh^2(Lk)}$$

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

$$= \frac{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{1 + \sinh^2(Lk)\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)^2\right\}}$$

$\frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}-\frac{k_0}{k}\right)^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{k^2}{k_0^2}+\frac{k_0^2}{k^2}-2\right\}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k}+\frac{k}{k_0}\right)^2\sinh^2(Lk)}{1 + \sinh^2(Lk)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0}+\frac{k_0}{k}\right)^2\right\}} = \underline{\underline{1}} \quad ✓$$

4/4

f)

$$T = \frac{1}{\cosh^2(Lk) + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0} - \frac{k_0}{k}\right)^2 \sinh^2(Lk)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{k_0} + \frac{k_0}{k}\right)^2 \sinh^2(Lk)}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{1}_{\text{vernachl.}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\sqrt{2mE}} + \frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{2m(V-E)}}\right)^2 \underbrace{\sinh^2(Lk)}_{\gg 1}} \xrightarrow{V \gg 1,\ \frac{L}{2} \gg 1} 0$$

← kann man das noch anders schreiben? *

Hohe und breite Potentialbarriere wäre im klassischen Fall irgendwann gar nicht mehr überwindbar, also $T_k = 0$. Hier gilt nur $T \to 0$. ✓

4/4

$\sinh(\kappa L) \approx \frac{1}{2} e^{\kappa L}$

* $$T \approx \frac{16}{\left(\frac{k}{k_0} + \frac{k_0}{k}\right)^2} e^{-2\kappa L} = \frac{16\,(\kappa k_0)^2}{(k_0^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa L}$$

$$= \frac{16\,E\,(V_0 - E)}{V_0^2}\, e^{-2\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}L}$$ (⇒ exp. unterdrückt)