Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

13.05.'16 Theoretische Physik III Blatt 5

Marvin Zanke
Florian Stradiwitz
Till Wenigmann

H1) $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^+)$, $\hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^+)$

a)
$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|\hat{a}+\hat{a}^+|n\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+|n\rangle\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\langle n|\sqrt{n}|n-1\rangle + \langle n|\sqrt{n+1}|n+1\rangle\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n}\underbrace{\langle n|n-1\rangle}_{=0,\text{ da ONB}} + \sqrt{n+1}\underbrace{\langle n|n+1\rangle}_{0}\right\} = 0 \checkmark$$

Kann man die Summe so auseinanderziehen? Also $\langle x|A+D|y\rangle = \langle x|A|y\rangle + \langle x|D|y\rangle$?? Oder gilt auch $\langle n|A+B|n\rangle = \langle n|(A|n\rangle + B|n\rangle)$?

beides richtig

$$\langle n|\hat{x}^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle n|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}+\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle$$

gleiches Argument wie oben mit $n, n+2$ bzw. $n, n-2$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\langle n|\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\langle n|\hat{a}\sqrt{n+1}|n+1\rangle + \langle n|\hat{a}^+\sqrt{n}|n-1\rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\langle n|n\rangle + \sqrt{n}\sqrt{n}\langle n|n\rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{2n+1\right\} \checkmark$$

Kann man das i hier einfach rausziehen ohne komplex zu konjugieren

ja (komplex conj. müsstest du ja nur, wenn es "im Bra" stehen würde.)

$$\langle n|\hat{p}|n\rangle = \langle n|\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^+)|n\rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle n|\hat{a}-\hat{a}^+|n\rangle$$
$$= 0 \checkmark \quad \text{da wieder } \langle n|n+1\rangle = 0 \text{ und } \langle n|n-1\rangle = 0$$

$$\langle n|\hat{p}^2|n\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}-\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle$$
$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\langle n|\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle$$
$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\left\{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\langle n|n\rangle + \sqrt{n}\sqrt{n}\langle n|n\rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\left\{2n+1\right\} \checkmark \quad 4/4$$

1a	1b	2a	2b	2c	2d	2e	Σ
4/4	2/2	3/3	3/3	3/3	3/3	0/2	18/20

sehr gut

Damit folgt dann auch:

$$(\Delta x)_n = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle - \langle n|\hat{x}|n\rangle^2} = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}$$

Was soll der Index n bedeuten? *

$$(\Delta p)_n = \sqrt{\langle n|\hat{p}^2|n\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)}$$

b)

$$\Rightarrow (\Delta x)_n (\Delta p)_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}(2n+1)}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2} = \frac{\hbar}{2}(2n+1) = \hbar(n+1/2)$$

✓

2/2

* Erwartungswerte (und damit auch Δ..) sind ja immer für einen bestimmten Zustand definiert. Also wenn ich schreibe $\langle\hat{x}\rangle = \ldots$ oder $\Delta x = \ldots$ dann bringt dir das nur was, wenn du weißt bezüglich welchem Zustand $|\psi\rangle$ ich die berechnet habe. Der Index hier heißt also $(\Delta x)_n \equiv \Delta x$ bezüglich $|n\rangle$.

H2) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t,x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(t,x) = E\psi(t,x)$

$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$, $V_0 > 0$, $\alpha > 0$

a) $\xi = \tanh(\alpha x) \Leftrightarrow x = \frac{\tanh^{-1}(\xi)}{\alpha}$, $\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\xi^2}$

$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\cosh^2(\alpha x)\cdot\alpha - \sinh^2(\alpha x)\cdot\alpha}{\cosh^2(\alpha x)} = \frac{\alpha}{\cosh^2(\alpha x)}$

Passt das jetzt so mit innerer / äußerer Ableitung wie wir drüber geredet haben? ja

$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)\psi(x,t) = E\psi(x,t)$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)\psi(x,t) = E\psi(x,t)$

(*) $\Leftrightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\alpha(1-\xi^2))\frac{\partial}{\partial\xi}(\alpha(1-\xi^2))\frac{\partial}{\partial\xi}\right]\psi(x,t) = \left(\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} + E\right)\psi(x,t)$

NR: $\xi = \frac{\sinh\alpha x}{\cosh\alpha x} \Leftrightarrow \cosh^2\alpha x = \frac{\sinh^2\alpha x}{\xi^2} = \frac{\cosh^2\alpha x - 1}{\xi^2}$

$\Leftrightarrow \cosh^2(\alpha x)\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) = -\frac{1}{\xi^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2} = \cosh^2(\alpha x)\left(\frac{1-\xi^2}{\xi^2}\right) \Leftrightarrow \cosh^2\alpha x = \frac{1}{1-\xi^2}$

woher kommt das s? Bzw. wieso definiert man das gerade so?*

(*) $\left[\alpha^2(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(x,t)\right]\right] = \left[\frac{-2mV_0}{\hbar^2}(1-\xi^2) - \frac{2mE}{\hbar^2}\right]\psi(x,t)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(x,t)\right] + \left[\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2(1-\xi^2)}\right]\psi(x,t) = 0$

UND: wenn man $s(s+1)$ festlegt, kann man ja auf s schließen. Aber nicht eindeutig: $s_{1/2} \overset{pq}{=} x \pm \sqrt{\ldots}$ Was ist mit negativer Lsg?

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\psi(x,t)\right] + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{1-\xi^2}\right]\psi(x,t) = 0$ ✓

mit $\epsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar\alpha}$, $\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2} = s(s+1)$, $s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right)$

3/3

* Ich würde sagen, dass s genau so eine schöne Wahl ist, sieht man erst a posteriori. z. B. findet man am Ende $n_{max} = s$.

b) $\varphi = (1-\xi^2)^{\epsilon/2} w(\xi)$

wieso sollte man so substituieren?

$$0 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)^{\epsilon/2} w(\xi)\right)\right] + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{1-\xi^2}\right]\left((1-\xi^2)^{\epsilon/2} w(\xi)\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\left(\frac{\epsilon}{2}(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1}(-2\xi) w(\xi) + w'(\xi)(1-\xi^2)^{\epsilon/2}\right)\right]$$

im Prinzip willst du dieses $\frac{1}{1-\xi^2}$ loswerden

$$+\left[s(s+1)(1-\xi^2)^{\epsilon/2} - \epsilon^2(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1}\right] w(\xi)$$

$$0 = -2\xi\left\{-\epsilon\xi(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1} w(\xi) + \underline{w'(\xi)}(1-\xi^2)^{\epsilon/2}\right\}$$

$$+(1-\xi^2)\Big\{-\epsilon(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1} w(\xi) - \epsilon\xi\left(\frac{\epsilon}{2}-1\right)(1-\xi^2)^{\epsilon/2-2}(-2\xi) w(\xi)$$

$$-\epsilon\xi(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1}\underline{w'(\xi)} + w''(\xi)(1-\xi^2)^{\epsilon/2}$$

$$+\frac{\epsilon}{2}(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1}(-2\xi)\underline{w'(\xi)}\Big\}$$

$$+\left[s(s+1)(1-\xi^2)^{\epsilon/2} - \epsilon^2(1-\xi^2)^{\epsilon/2-1}\right] w(\xi)$$

$\cdot(1-\xi^2)^{-\epsilon/2}$ $\downarrow$

$$\Rightarrow 0 = w''(1-\xi^2) + w'(\xi)(-2\xi - \epsilon\xi - \epsilon\xi)$$

$$+ w(\xi)\left\{2\epsilon\xi^2(1-\xi^2)^{-1} - \epsilon + 2\epsilon\xi^2(1-\xi^2)^{-1}\left(\frac{\epsilon}{2}-1\right) + s(s+1) - \epsilon^2(1-\xi^2)^{-1}\right\}$$

$$= (1-\xi^2) w''(\xi) - 2\xi(1+\epsilon) w'(\xi) + w(\xi)\left\{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{-\epsilon + \epsilon^2\xi^2(1-\xi^2)^{-1} + s(s+1) - \epsilon^2(1-\xi^2)^{-1}}_{-\epsilon + s(s+1) + (1-\xi^2)^{-1}(\epsilon^2\xi^2 - \epsilon^2)}}_{-\epsilon + s(s+1) + \epsilon^2\frac{\xi^2-1}{1-\xi^2}}}_{-\epsilon + s(s+1) - \epsilon^2}}_{-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)}\right\}$$

$$= (1-\xi^2) w''(\xi) - 2\xi(1+\epsilon) w'(\xi) - (\epsilon-s)(\epsilon+s+1) w(\xi) = 0$$

✓

3/3

c) $w(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$; $w'(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \xi^{k-1}$; $w''(\xi)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k \xi^{k-2}$

einsetzen in DGL.

$$(1-\xi^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\xi^{k-2}-2\xi(1+\epsilon)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k\xi^{k-1}-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi^k=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\xi^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\xi^k-2(1+\epsilon)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k\xi^k-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi^k=0$$

Shift; kein Beitrag für $k=0,1$; $k=0$ kein Beitrag

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}\xi^k-\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k\xi^k-2(1+\epsilon)\sum_{k=0}^{\infty} k a_k\xi^k-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k\xi^k=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2(1+\epsilon)k a_k-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)a_k\right\}\xi^k=0$$

Wie kann man zeigen (math.) dass jetzt schon die Koeffizienten jeweils verschw. müssen?

Ein Polynom ist nur dann $=0$, wenn jeder Koeffizient verschwindet..

Nun muss schon der Koeffizient für jedes k verschwinden, da dies für beliebiges ξ gilt

$$\Rightarrow (k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2(1+\epsilon)k a_k-(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)a_k=0$$

$$\Leftrightarrow a_{k+2}=a_k\frac{k(k-1)+2(1+\epsilon)k+(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)}{(k+2)(k+1)}$$

$$=a_k\frac{k(k+1+2\epsilon)+(\epsilon-s)(\epsilon+s+1)}{(k+2)(k+1)} \quad (*)$$

Muss es nicht sogar sch. stark abfallen statt nur endlich zu sein?

Const. Fkt ist ja auch nicht normierbar über Raum

$x\to\pm\infty \Rightarrow \xi\to\pm 1$, denn $\xi=\tanh(\alpha x)$

f muss endlich bleiben (eine Schwartz-Fkt sein ??!!) ja damit die Funktion noch normierbar bleibt. $\Rightarrow$ endlich viele Koeffizienten

Muss ja nur zwischen $\xi=\pm 1$ normierbar sein.

3/3

Woher wissen wir, dass f so nicht endlich bleibt mit $a_k\neq 0\ \forall k$

Was du meinst ist vermutlich, dass man Koeffizienten finden könnte, so dass auch unendlich viele (bei 1) aufaddiert noch endlich sind? (z.B. sowas wie $a_k=\frac{1}{k^2}$) Das stimmt prinzipiell, aber unsere Koeffizienten müssen ja auch die Gl. $(*)$ erfüllen. Wenn du die für sehr große k anschaust, findest du $a_{k+1}\sim a_k$. Mit dieser Bedingung ist die einzige Möglichkeit, dass die Reihe abbricht.

d) Nun soll $a_l = 0$ für beliebiges l

$$\rightarrow \quad k(k+2\epsilon+1) + (\epsilon - s)(\epsilon+s+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2+2\epsilon k + k + \epsilon^2 + \epsilon - s^2 - s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 + s - \underbrace{(k^2+2\epsilon k + k+\epsilon^2+\epsilon)}_{\frac14(2k+2\epsilon+1)^2 - \frac14} = 0$$

$$\Rightarrow \quad s_{1,2} = -\frac12 \pm \sqrt{\frac14 + \left(\frac14(2k+2\epsilon+1)^2 - \frac14\right)} = -\frac12 \pm \frac12(2k+2\epsilon+1)$$

$\Rightarrow \boxed{s_1 = k+\epsilon}$ $k\in\mathbb{N}$, weil Laufindex Summe

$s_2 = -(k+\epsilon) - 1$ $\boxed{n := k}$

Wieso konnten wir s_2 ausschließen?

da $s>0$

Mit $\epsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar\alpha}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{\hbar^2\alpha^2\epsilon^2}{2m} = E = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(s-n)^2$

$\epsilon = s - n$

$$= -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\left(\frac12\left(-1+\sqrt{1+\frac{8mV_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right) - n\right)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\Big(\underbrace{-(1+2n)+\sqrt{1+\frac{8mV_0}{\alpha^2\hbar^2}}}_{(*)}\Big)^2 \quad (*) \checkmark$$

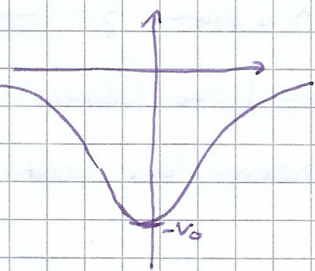
≥ 0, $n\to\infty \Rightarrow (*) \to \infty$

3/3

Wieso wird E_n für größere n immer negativer? $n=0$ GZ sollte kleinste Energie haben oder? *

e) Es gibt abzählbar endlich viele Energieniveaus, solange bis $E_n = V_0$

Das Potential sieht ja so aus:



Also ist die richtige Bedingung

$E_n < 0$

und damit $\epsilon > 0$.

Zusammen mit $s = \epsilon + n$ gibt das $n < s$.

* Für größere $n > s$ ist (*) einfach keine Lsg. mehr. 0/2

$E \le 0 \Rightarrow n \le s$

$$n = \frac12\left(\sqrt{1+\frac{8mV_0}{\alpha^2\hbar^2}} - 1\right)$$