Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

18.05.16 Theoretische Physik III Blatt: Ergänzung, Hermitesche Polynome Marvin [illegible]

* Ich hab halt auch keine Lösung und gerade leider auch nicht so viel Zeit. Deswegen habe ich auch einfach zum Teil Google gefragt und die ersten Treffer sehen immer ganz gut aus. Die *

A1) Mal abgesehen davon, dass ich bei vielen Aufgaben nach schauen musste wie man ansetzt, wäre es super wenn du mir mit den Fragen helfen könntest. Besonders interessiert mich eigentlich, ob meine ersten ergänzen Ansätze auch irgendwie zum Ziel geführt hätten.*

** habe ich dir mal ausgedruckt und dazu getan. Falls du sie nicht hilfreich findest, frag mich nochmal :)

a) Dazu leiten wir zunächst eine andere Relation für die Hermit Polynome her: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ (*)

Kann man die Aufgabe auch lösen mit der geg. Definition der herm. Polynom?

↳ Schon, aber ist auch nicht schöner :) Ich hab dir mal angehängt, was Google mir ausgespuckt hat.

Sei $f(x) = e^{-x^2} \rightarrow f(x-y) = e^{-(x-y)^2}$, bilde Taylorreihe um x $(y=0)$:

$$(**)\quad Tf(x-y, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \{(x-y) - x\}^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n$$

$$\overset{\shortparallel}{e^{-(x-y)^2}} = e^{-x^2-y^2+2xy}$$

Mit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$

Kann man (**) außerdem weiter umformen:

$$e^{-y^2+2xy} = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n$$

$$\overset{!!}{=}: w(x,y)$$

nennen wir die erzeugende Funktion

Dann gilt durch Ableiten auf beiden Seiten nach x:

$$2y e^{-y^2+2xy} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d}{dx} H_n(x) \quad (1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d}{dx} H_n(x), \text{ denn } H_0(x) = [illegible]$$

Außerdem durch einsetzen:

$$2y e^{-y^2+2xy} = 2y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n!} H_n(x)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} 2n H_{n-1}(x) \quad (2)$$

Wie kann man diese Summe jetzt wieder auf n=0 shiften? Was ist $H_{-1}(x)$? $\overset{!?}{=} 0$?

Koeffizientenvergleich liefert sofort ((1) und (2)), dass

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$$

Ist der Koeffizientenvergl. möglich? eindeutig?

↳ ja. H_n ist ja immer ein

wozu willst du die Summe auf n=0 shiften?

So wie es ist bekommst du die H_{-1} Problematik ja gar nicht...

b) Wir rechnen aus: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} w(x,z)\, w(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} e^{-z^2+2xz} e^{-y^2+2xy}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} e^{2x(z+y)} e^{-z^2-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x-(z+y))^2} e^{2zy}$$

$$= e^{2zy} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-k^2} = e^{2zy}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2zy)^n}{n!} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n y^n}{n!}$$

Wieso steht hier das e^{-x^2} im Integral für Orthogonalität *

Außerdem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} w(x,z)\, w(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} y^m\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n y^m}{n!\, m!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)}$$

$\sqrt{\pi}\, 2^n n!$ Summe durch Koeffizientenvgl.

Wieso klappt hier schon wieder Koeffizientenvgl? **

Wie ist das mit dem park Integrieren gemeint um Ordnung zu reduzieren? Siehe Anhang

* Warum nicht? :)

Ich würde sagen das ist weniger die Orthogonalität der herm. Pol. sondern die der Eigenfkten des harm. Osz. und die sind halt im Prinzip $\sim e^{-y^2/2} H_n(y)$.

** Hier ist das ja quasi der "normale" Koeffizientenvgl, also ich vergleiche die Vorfaktoren vor $z^n y^m$.

c) Die Eigenfkt. zum harm. Oszillatorpotential waren geg. durch:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

und wieso braucht man hier dann kein e^{-x^2}? ?

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n(x)\psi_m(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{2^m m!}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H_m\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

Hast du doch.

$z := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$

$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{2^m m!}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z)\, e^{-z^2} \frac{dz}{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}$$

$$\overset{b)}{=} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{2^m m!}} \left\{ 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{nm} \right\}$$

$$= \delta_{nm}$$ ✓

d)
$$\frac{d}{dx} H_n(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\right)$$
$$= (-1)^n \left\{ 2x e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \right\}$$
$$= 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$$

Außerdem $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$ aus a)

$$\Rightarrow \quad 2n H_{n-1}(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$ ✓

e)
$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} - (1-\varepsilon_n)\right] H_n(x) = 0$$

$$\overset{a)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{d}{dx}\left(2n H_{n-1}(x)\right) - 2x\left(2n H_{n-1}(x)\right) - (1-\varepsilon_n) H_n(x) = 0$$

$$\overset{a) \text{ mit } H_{n-1}}{\Leftrightarrow} \quad 2n\left(2(n-1) H_{n-2}(x) - 2x H_{n-1}(x)\right) - (1-\varepsilon_n) H_n(x) = 0$$

$$\overset{d)}{\Leftrightarrow} \quad -2n H_n(x) - (1-\varepsilon_n) H_n(x) = 0 \quad :$$

Dass $H_n \neq 0$ ist hier zwingend erforderlich oder?

$H_n(x) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_n = 2n+1$$, wobei wir bei (*) benutzt haben, dass d) geschrieben werden kann:

Schon, aber ist ja auch so.

$$H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)$$ Gleiches Resultat wie in LL

Sonst noch was Vergleichbares?

$$\Leftrightarrow \quad 2(n-1) H_{n-2}(x) - 2x H_{n-1}(x) = -H_n(x)$$ für harm. Osz.