Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

30.05.2016 Theoretische Physik III Blatt 6

Marvin Zanke
Florian Stradwitz
Till Wenigmann

H1)

a) $\langle\phi(t)|\hat{x}|\phi(t)\rangle = \langle\phi|\hat{x}|\phi\rangle = \langle\phi|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^+)|\phi\rangle$

$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\phi|\hat{a}+\hat{a}^+|\phi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\{\langle\phi|\hat{a}|\phi\rangle+\langle\phi|\hat{a}^+|\phi\rangle\}$

$\langle\phi|\hat{a}^+ = (\hat{a}|\phi\rangle)^+ = (\alpha|\phi\rangle)^+ = \alpha^+\langle\phi| = \alpha^*\langle\phi|$

$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\{\alpha\langle\phi|\phi\rangle + \alpha^*\langle\phi|\phi\rangle\}$

$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\{\alpha+\alpha^*\}$ ✓

1a	1b	1c	2a	2b	Σ
3/3	3/3	3/3	5/5	6/6	20/20

sehr gut!

Darf man das so argumentieren mit $\langle\phi|\phi\rangle=1$ bzw. gilt das überhaupt? Gilt das immer dass $\langle\psi|\psi\rangle=1$?

ja

$\langle\phi|\phi\rangle=1$ bei richtiger Wahl von c (Anwesenheitsaufgabe)

$\langle\phi(t)|\hat{x}^2|\phi(t)\rangle = \langle\phi|\hat{x}^2|\phi\rangle = \langle\phi|\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^+)^2|\phi\rangle$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\phi|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}+\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle$

Ich hatte leider immer noch keine Zeit die Zusatzaufgaben nachzuschauen, aber nächste Woche habe ich mehr Zeit. Ihr bekommt sie dann nächsten Freitag ☺

$[\hat{a},\hat{a}^+]=1$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\{\langle\phi|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}+\hat{a}^+\hat{a}+1+\hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\{\langle\phi|\hat{a}^2|\phi\rangle+\langle\phi|\hat{a}^{+2}|\phi\rangle+2\langle\phi|\hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle+\langle\phi|\phi\rangle$

$\langle\phi|1|\phi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle$? ✓

$= \frac{\hbar}{2m\omega}\{\alpha^2+\alpha^{*2}+2\alpha\alpha^*+1\}$ ✓

$\Rightarrow (\Delta x)^2 = \langle\phi|\hat{x}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{x}|\phi\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}+2\alpha\alpha^*+1 - (\alpha+\alpha^*)^2\right)$

$= \frac{\hbar}{2m\omega}(1) = \frac{\hbar}{2m\omega} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ ✓, $\boxed{\text{KEINE } t,\alpha \text{ Abhängigkeit}}$ ✓

3/3

b)

Kann man imaginäre Zahlen auch einfach rausziehen, oder dann komplex konjugieren? $\langle\phi|c|\phi\rangle = c\langle\phi|\phi\rangle$ für $c\in\mathbb{C}$

einfach rausziehen

$\langle\phi(t)|\hat{p}|\phi(t)\rangle = \langle\phi|\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{i}(\hat{a}-\hat{a}^+)|\phi\rangle$

$= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{i}\langle\phi|\hat{a}-\hat{a}^+|\phi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{i}\{\langle\phi|\hat{a}|\phi\rangle-\langle\phi|\hat{a}^+|\phi\rangle\}$

$= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{1}{i}\{\alpha-\alpha^*\}$ ✓

$\langle\phi|\hat{p}^2|\phi\rangle = \langle\phi|-\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}-\hat{a}^+)^2|\phi\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle\phi|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}-\hat{a}\hat{a}^+-\hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle$

$= -\frac{\hbar m\omega}{2}\{\langle\phi|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}-(\hat{a}^+\hat{a}+1)-\hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle\}$

$= -\frac{\hbar m\omega}{2}\{\langle\phi|\hat{a}^2|\phi\rangle+\langle\phi|\hat{a}^{+2}|\phi\rangle-2\langle\phi|\hat{a}^+\hat{a}|\phi\rangle-\langle\phi|\phi\rangle\}$

$= -\frac{\hbar m\omega}{2}\{\alpha^2+\alpha^{*2}-2\alpha\alpha^*-1\}$ ✓

$\Rightarrow (\Delta p)^2 = \langle\phi|\hat{p}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{p}|\phi\rangle^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}-2\alpha\alpha^*-1 - \alpha^2-\alpha^{*2}+2\alpha\alpha^*\right)$

$\frac{\hbar m\omega}{2}$ ✓

$$\Rightarrow (\Delta p) = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$$ ✓

$$\Rightarrow (\Delta x)(\Delta p) = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{\hbar}{2}$$ ✓

KEINE t, α-Abhängigkeit ✓

Oder Ood t-Abhängigkeit Durch $\phi\phi^2$

?

Ist doch gar nicht mehr in dem Ausdruck

3/3

c) $(\Delta H)^2 = \langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle - \langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle^2$, $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$

$$\langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle = \langle\phi|\hbar^2\omega^2(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)^2|\phi\rangle$$

$$= \hbar^2\omega^2 \langle\phi|\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + 1/4|\phi\rangle$$

$$= \hbar^2\omega^2 \langle\phi|\hat{a}^+(\hat{a}^+\hat{a}+1)\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + 1/4|\phi\rangle$$

$$= \hbar^2\omega^2 \langle\phi|\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a} + 1/4|\phi\rangle$$

$$= \hbar^2\omega^2 \{\langle\phi|\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a} + 2\hat{a}^+\hat{a} + 1/4|\phi\rangle\}$$

$$= \hbar^2\omega^2 \{\alpha^2\alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1/4\}$$ ✓

$$\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle = \langle\phi|\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)|\phi\rangle = \hbar\omega\langle\phi|\hat{a}^+\hat{a} + 1/2|\phi\rangle$$

$$= \hbar\omega\{\alpha\alpha^* + 1/2\}$$ ✓

Wieso muss man bei dieser Aufgabe nicht den gleichen Ansatz wie in der Annihilationsbetrachtung wählen (mit der Summe) und dann bekommt man eine Doppelsumme?

Wir gehen hier direkt von $\hat{a}|\phi(t)\rangle = \alpha|\phi(t)\rangle$ aus.

$$\Rightarrow (\Delta H)^2 = \hbar^2\omega^2(\alpha^2\alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1/4 - (\alpha\alpha^* + 1/2)^2)$$

$$= \hbar^2\omega^2 (\alpha\alpha^*) = \hbar^2\omega^2|\alpha|^2$$ ✓

$$\Rightarrow \Delta H = \hbar\omega|\alpha|$$ ✓

$$\Rightarrow \frac{\Delta H}{\langle H\rangle} = \frac{\hbar\omega|\alpha|}{\hbar\omega(\alpha\alpha^* + 1/2)} = \frac{\hbar\omega|\alpha|}{\hbar\omega(|\alpha|^2 + 1/2)}$$

$$= \frac{|\alpha|}{|\alpha|^2 + 1/2} \overset{|\alpha| \gg 1}{\approx} \frac{|\alpha|}{|\alpha|^2} = \frac{1}{|\alpha|}$$ ✓

3/3

#2) $\hat{L}_k = \epsilon_{klm} \hat{x}_l \hat{p}_m$

a) $[\hat{L}_i, \hat{x}_j] = \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \hat{p}_m \hat{x}_j - \hat{x}_j \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \hat{p}_m$

$= \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} \hat{x}_j\right) - \hat{x}_j \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$

$= \frac{\hbar}{i} \left(\epsilon_{ilm} \hat{x}_l \delta_{jm}\right) = -i\hbar \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \delta_{jm} = i\hbar \epsilon_{ijl} \hat{x}_l$

OK mit ϵ-Tensor oder lieber einzeln ausrechnen?

so ist schöner

Folgt mit trivialer Umbenennung $l \to k$

Ist $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\psi$ ✓ oder $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\psi + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\psi$ (Produktregel)?

$\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a$ nach Satz v. Schwartz 2x st. diffbar. blabla :)

$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \hat{p}_m \hat{p}_j - \hat{p}_j \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \hat{p}_m$

$= \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m}$

$= -i\hbar \Big\{ \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \epsilon_{ilm} \delta_{jl} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} - \epsilon_{ilm} \hat{x}_l \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_m} \Big\}$

$= -i\hbar \Big\{ -\epsilon_{ilm} \delta_{jl} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_m} \Big\} = i\hbar \epsilon_{ilm} \delta_{jl} \hat{p}_m = i\hbar \epsilon_{ijm} \hat{p}_m$

$m \to k$ und fertig ✓

Nun benutzen wir, dass: $[a, bc] = [a,b]c + b[a,c]$

$[ab, c] = a[b,c] + [a,c]b$

Kann man auch $[\hat{L}_i, \hat{x}_i^2]$ direkt ausrechnen? (nur ja oder nein reicht; habe es nicht hinbekommen)

bin nicht sicher was du meinst ..

$\hat{x}^2 := \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2$

$[\hat{L}_i, \hat{x}^2] = [\hat{L}_i, \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2] = [\hat{L}_i, \hat{x}_1^2] + [\hat{L}_i, \hat{x}_2^2] + [\hat{L}_i, \hat{x}_3^2]$

$= \hat{x}_1 [\hat{L}_i, \hat{x}_1] + [\hat{L}_i, \hat{x}_1]\hat{x}_1 + \hat{x}_2 [\hat{L}_i, \hat{x}_2] + [\hat{L}_i, \hat{x}_2]\hat{x}_2$

$+ \hat{x}_3 [\hat{L}_i, \hat{x}_3] + [\hat{L}_i, \hat{x}_3]\hat{x}_3$

$= \hat{x}_1 (i\hbar \epsilon_{i1k} \hat{x}_k) + (i\hbar \epsilon_{i1k} \hat{x}_k)\hat{x}_1$

$+ \hat{x}_2 (i\hbar \epsilon_{i2k} \hat{x}_k) + (i\hbar \epsilon_{i2k} \hat{x}_k)\hat{x}_2$

(*) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$

$+ \hat{x}_3 (i\hbar \epsilon_{i3k} \hat{x}_k) + (i\hbar \epsilon_{i3k} \hat{x}_k)\hat{x}_3$

$= 2i\hbar \Big\{ \epsilon_{i1k} \hat{x}_1 \hat{x}_k + \epsilon_{i2k} \hat{x}_2 \hat{x}_k + \epsilon_{i3k} \hat{x}_3 \hat{x}_k \Big\}$

$= -2i\hbar \Big\{ \epsilon_{jik} \hat{x}_j \hat{x}_k \Big\} = 2i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{x}_k = 0$ für festes i, da (*) ✓

Ab welcher Stelle kann man hier jetzt den Operator-Hut weglassen? $\hat{x} \to x$

Im prinzip jederzeit, aber warum willst du das weglassen?

Geht das auch ohne Fallunterscheidung für jedes i?

Das ist ja keine Fallunterscheidung. Wenn du es kürzer schreiben willst kannst du halt

$$[\hat{L}_i, \hat{p}^2] = [\hat{L}_i, \hat{p}_1^2] + [\hat{L}_i, \hat{p}_2^2] + [\hat{L}_i, \hat{p}_3^2]$$

$$= \hat{p}_1 [\hat{L}_i, \hat{p}_1] + [\hat{L}_i, \hat{p}_1] \hat{p}_1 + \hat{p}_2 [\hat{L}_i, \hat{p}_2] + [\hat{L}_i, \hat{p}_2] \hat{p}_2$$

$$+ \hat{p}_3 [\hat{L}_i, \hat{p}_3] + [\hat{L}_i, \hat{p}_3] \hat{p}_3$$

$$= \hat{p}_1 (i\hbar\, \epsilon_{i1k} \hat{p}_k) + (i\hbar\, \epsilon_{i1k} \hat{p}_k) \hat{p}_1$$

$$+ \hat{p}_2 (i\hbar\, \epsilon_{i2k} \hat{p}_k) + (i\hbar\, \epsilon_{i2k} \hat{p}_k) \hat{p}_2$$

$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ $$+ \hat{p}_3 (i\hbar\, \epsilon_{i3k} \hat{p}_k) + (i\hbar\, \epsilon_{i3k} \hat{p}_k) \hat{p}_3$$

$$= -2i\hbar \{ \epsilon_{1ik} \hat{p}_1 \hat{p}_k + \epsilon_{2ik} \hat{p}_2 \hat{p}_k + \epsilon_{3ik} \hat{p}_3 \hat{p}_k \}$$

$$= -2i\hbar \{ \epsilon_{jik} \hat{p}_j \hat{p}_k \} = 0$$ für festes i, selbes Argument

(entspricht dem Kreuzprodukt: $\vec{p} \times \vec{p}$)

5/5

b) $[\hat{L}_k, \hat{L}_l] = (\epsilon_{kab}\hat{x}_a\hat{p}_b)(\epsilon_{lmn}\hat{x}_m\hat{p}_n) - (\epsilon_{lmn}\hat{x}_m\hat{p}_n)(\epsilon_{kab}\hat{x}_a\hat{p}_b)$

$$= \epsilon_{kab}\epsilon_{lmn}\hat{x}_a\hat{p}_b\hat{x}_m\hat{p}_n - \epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\hat{x}_m\hat{p}_n\hat{x}_a\hat{p}_b$$

$$= \epsilon_{kab}\epsilon_{lmn}\left\{\hat{x}_a\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_b}x_m\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

$$-\epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\left\{\hat{x}_m\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\hat{x}_a\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_b}\right\}$$

$$= \epsilon_{kab}\epsilon_{lmn}\frac{\hbar}{i}\left\{\hat{x}_a\delta_{bm}\hat{p}_n + \hat{x}_a\hat{x}_m\frac{\partial}{\partial x_b}\hat{p}_n\right\}$$

$$-\epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\frac{\hbar}{i}\left\{\hat{x}_m\delta_{an}\hat{p}_b + \hat{x}_m\hat{x}_a\frac{\partial}{\partial x_n}\hat{p}_b\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\epsilon_{kam}\epsilon_{lmn}\hat{x}_a\hat{p}_n - \frac{\hbar}{i}\epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\hat{x}_m\hat{p}_b$$

$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$ und $\epsilon_{kim}\epsilon_{ijm} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}$

$$+\frac{\hbar}{i}\left\{\epsilon_{kab}\epsilon_{lmn}\hat{x}_a\hat{x}_m\frac{\partial}{\partial x_b}\hat{p}_n - \epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\hat{x}_m\hat{x}_a\frac{\partial}{\partial x_n}\hat{p}_b\right\}$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\left\{(\delta_{kl}\delta_{an} - \delta_{kn}\delta_{al})\hat{x}_a\hat{p}_n - (\delta_{kl}\delta_{mb} - \delta_{lb}\delta_{mk})\hat{x}_m\hat{p}_b\right\}$$

$$\underbrace{+\epsilon_{kab}\epsilon_{lmn}\hat{x}_a\hat{x}_m\hat{p}_b\hat{p}_n - \epsilon_{lmn}\epsilon_{kab}\hat{x}_m\hat{x}_a\hat{p}_n\hat{p}_b}_{=0,\ \text{da } [x_a, x_m]=0,\ [p_a, p_n]=0}$$

Ist $\hat{x}_a\hat{p}_a = \hat{x}_m\hat{p}_m$ s.d. die Terme sich wegkürzen? (Summenkonv.!) ✓

$$= i\hbar\left\{\delta_{kl}\hat{x}_a\hat{p}_a - \hat{x}_l\hat{p}_k - \delta_{kl}\hat{x}_m\hat{p}_m + \hat{x}_k\hat{p}_l\right\}$$

$$= -i\hbar\left\{(\delta_{kn}\delta_{al} - \delta_{ln}\delta_{ka})\hat{x}_a\hat{p}_n\right\}$$

$$= -i\hbar\,\epsilon_{klm}\epsilon_{nam}\hat{x}_a\hat{p}_n = i\hbar\,\epsilon_{klm}\hat{L}_m = [\hat{L}_k, \hat{L}_l]\ ✓$$

$$[\hat{L}_j, \hat{L}^2] = [\hat{L}_j, \hat{L}_1^2] + [\hat{L}_j, \hat{L}_2^2] + [\hat{L}_j, \hat{L}_3^2]$$

$$= \hat{L}_1[\hat{L}_j, \hat{L}_1] + [\hat{L}_j, \hat{L}_1]\hat{L}_1 + \hat{L}_2[\hat{L}_j, \hat{L}_2] + [\hat{L}_j, \hat{L}_2]\hat{L}_2$$

$$+ \hat{L}_3[\hat{L}_j, \hat{L}_3] + [\hat{L}_j, \hat{L}_3]\hat{L}_3$$

z.B. $[\hat{L}_1, \hat{L}_m] = i\hbar\epsilon_{1mk}\hat{L}_k = \hat{L}_1\hat{L}_m - \hat{L}_m\hat{L}_1$

$\left.\begin{array}{l}\hat{L}_m\hat{L}_1 = \hat{L}_1\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{1mk}\hat{L}_k \\ \hat{L}_m\hat{L}_2 = \hat{L}_2\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{2mk}\hat{L}_k \\ \hat{L}_m\hat{L}_3 = \hat{L}_3\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{3mk}\hat{L}_k\end{array}\right\}$

Geht das alles einfacher? ja

$$= \hat{L}_1\{i\hbar\epsilon_{j1m}\hat{L}_m\} + \{i\hbar\epsilon_{j1m}\hat{L}_m\}\hat{L}_1 + \hat{L}_2\{i\hbar\epsilon_{j2m}\hat{L}_m\} + \{i\hbar\epsilon_{j2m}\hat{L}_m\}\hat{L}_2$$

$$+ \hat{L}_3\{i\hbar\epsilon_{j3m}\hat{L}_m\} + \{i\hbar\epsilon_{j3m}\hat{L}_m\}\hat{L}_3$$

$$= -i\hbar\{\epsilon_{1jm}\hat{L}_1\hat{L}_m + \epsilon_{1jm}(\hat{L}_1\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{1mk}\hat{L}_k)\}$$

$$-i\hbar\{\epsilon_{2jm}\hat{L}_2\hat{L}_m + \epsilon_{2jm}(\hat{L}_2\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{2mk}\hat{L}_k)\}$$

$$-i\hbar\{\epsilon_{3jm}\hat{L}_3\hat{L}_m + \epsilon_{3jm}(\hat{L}_3\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{3mk}\hat{L}_k)\}$$

wieso? (*) nächste Seite

$$= -i\hbar\{2\epsilon_{zjm}\hat{L}_z\hat{L}_m - i\hbar\epsilon_{1jm}\epsilon_{1mk}\hat{L}_k - i\hbar\epsilon_{2jm}\epsilon_{2mk}\hat{L}_k - i\hbar\epsilon_{3jm}\epsilon_{3mk}\hat{L}_k\}$$

$\epsilon_{zmj}\hat{L}_z\hat{L}_m = i\hbar\hat{L}_j$

$$= 2i\hbar\,\epsilon_{zmj}\hat{L}_z\hat{L}_m + \hbar^2\{\epsilon_{1jm}\epsilon_{1km}\hat{L}_k + \epsilon_{2jm}\epsilon_{2km}\hat{L}_k + \epsilon_{3jm}\epsilon_{3km}\hat{L}_k\}$$

$$= 2i\hbar(i\hbar\hat{L}_j) + \hbar^2\{(\delta_{jk} - \delta_{1k}\delta_{1j})\hat{L}_k + (\delta_{jk} - \delta_{2k}\delta_{2j})\hat{L}_k + (\delta_{jk} - \delta_{3k}\delta_{3j})\hat{L}_k\}$$

$$= -2\hbar^2\hat{L}_j + \hbar^2\{3\hat{L}_j - \delta_{1j}\hat{L}_1 - \delta_{2j}\hat{L}_2 - \delta_{3j}\hat{L}_3\} = 0\ ✓$$

6/

(*) über eine Fallunterscheidung kann ich das begründen aber anders nicht.

Für festes j gilt: $\epsilon_{zmj}\hat{L}_z\hat{L}_m =$

$j=1$: $L_2L_3 - L_3L_2 = [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = i\hbar \hat{L}_1$

$j=2$: $L_3L_1 - L_1L_3 = [\hat{L}_3, \hat{L}_1] = i\hbar \hat{L}_2$

$j=3$: $L_1L_2 - L_2L_1 = [\hat{L}_1, \hat{L}_2] = i\hbar L_3$

z ist eine sehr schlechte Wahl für einen Index 😉

ist doch ok

Z1)

a) $\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

$$e_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie zeige ich dass es ein Erzeugendensystem ist? Oder reicht 3 lin. unabh. Vektoren?

das reicht

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\phi\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos^2\phi\cos\theta\sin\theta + \sin^2\phi\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta\cos\phi\sin\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\phi = 0$$

$$\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos\theta\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\phi\cos\phi = 0$$

Wie kann man $x_i e_i = x_i U^T_{pi} e_r$ verstehen und woher kommt das? *

$$|\vec{e}_r| = \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$|\vec{e}_\theta| = \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|\vec{e}_\phi| = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

b) $\vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

Es gilt: $\vec{e}_r \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}\right|}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right) = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}\right|}\frac{\partial f}{\partial r}$

Irgendwie bin ich mit dem Beweis nicht zufrieden. Geht das strenger mathematisch?

ja, siehe Anhang

Nach einem Vektor ableiten ist in der Tat nicht so schön...

Analog für $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$, also $\vec{e}_i \cdot (\vec{\nabla} f) = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i}}{\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i}\right|}\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i}\right|}\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = r, \theta, \phi$

Wichtig dass die Einheitsvektoren vor der Ableitung stehen?

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

---

* Angenommen wir wollen von einer Basis $\hat{a}_i$ in eine Basis $\hat{b}_i$ $(i=1,2,3)$ wechseln. Dann würdest du das vermutlich folgendermaßen machen: Sei $\vec{x} = x_i \hat{a}_i$ in der a-Basis gegeben. Um die Koeffizienten in der b-Basis zu bekommen rechnet man $\hat{b}_i \cdot \vec{x}$ also $\vec{x} = \hat{b}_i(\hat{b}_i \cdot \vec{x})$ Summenkonvention
$(\hat{b}_i \cdot \vec{x})$ kann ich auch als Einträge eines Vektors sehen, denn ich auch bekomme, wenn ich $U^T \cdot \vec{x}$ rechne wobei $U = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$.

c) $\vec{v} = \vec{e}_\mu v_\mu$

Ist das $\vec{e}_\mu v_\mu$ bereits in Kugelkoord.?

ja

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(e_\mu v_\mu)$$

$\partial_r e_i = 0$ für $i = r, \theta, \phi$

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ für $i \neq j$

$$= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_\phi v_\phi) + e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_\phi v_\phi) + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_\phi v_\phi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$
$$+ e_\theta \frac{1}{r}\left(v_r \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r + v_\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + v_\phi \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\phi\right)$$
$$+ \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_r + v_\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\theta + v_\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\right)$$

$\partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$

$\partial_\theta \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$

$\partial_\theta \vec{e}_\phi = 0$

$\partial_\phi \vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\phi$

$\partial_\phi \vec{e}_\theta = \cos\theta \vec{e}_\phi$

$\partial_\phi \vec{e}_\phi = -\sin\theta \vec{e}_r - \cos\theta \vec{e}_\theta$

$$= \frac{\partial}{\partial r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$
$$+ \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\left(v_r \vec{e}_\theta + v_\theta(-\vec{e}_r) + v_\phi \cdot 0\right)$$
$$+ e_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r \sin\theta \vec{e}_\phi + v_\theta \cos\theta \vec{e}_\phi + v_\phi(-\sin\theta \vec{e}_r - \cos\theta \vec{e}_\theta)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} v_\theta$$

$$= \frac{2}{r} v_r + \frac{\partial}{\partial r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} v_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$

Aufzerden:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$
$$= \frac{1}{r^2}\left(2r v_r + r^2 \frac{\partial}{\partial r} v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\cos\theta v_\theta + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$
$$= \frac{2}{r} v_r + \frac{\partial}{\partial r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} v_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} v_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} v_\phi$$

Stimmen überein!

Nun beweisen wir noch die benutzten Relationen.

$\partial_r \vec{e}_r = 0$, trivialerweise, da keine r-Abhängigkeit mehr.

$\partial_r \vec{e}_\theta = 0$, $\partial_r \vec{e}_\phi = 0$ analog.

$$\partial_\theta \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \vec{e}_\theta$$

$$\partial_\theta \vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\cos\phi\\ -\sin\theta\sin\phi\\ -\cos\theta\end{pmatrix} = -\vec{e}_r$$

$$\partial_\theta \vec{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = 0, \text{ keine Abh.}$$

$$\partial_\phi \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = +\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

$$\partial_\phi \vec{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \cos\theta\,\vec{e}_\phi$$

$$\partial_\phi \vec{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\phi\\ -\sin\phi\\ 0\end{pmatrix} = -\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} - \cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-(\sin^2\theta\cos\phi + \cos^2\theta\cos\phi)\\ -(\sin^2\theta\sin\phi + \cos^2\theta\sin\phi)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\phi\\ -\sin\phi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

✓

d) $\Delta := \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$

$$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 (\nabla f)_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,(\nabla f)_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\nabla f)_\phi$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

✓

~~Lösung H.1~~

b) Kugelkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta \quad (1)$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta \quad (2)$$
$$z = r\cos\theta \quad (3)$$

~~aus b)~~:

$$\vec{e}_x = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad (4)$$
$$\vec{e}_y = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \quad (5)$$
$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \quad (6)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (7)$$
$$(1),(2),(3) \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{z}{r} \quad (8)$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

mit $\frac{\partial r}{\partial x} \overset{(7)}{=} \frac{x}{r} \overset{(1)}{=} \cos\varphi\sin\theta$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} =} \frac{\partial\tan\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\tan\varphi} \overset{(9)}{=} \left(-\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1} \overset{(1),(2)}{=} -\frac{\cancel{r}\sin\varphi\cancel{\sin\theta}}{r^{\cancel{2}}\cancel{\cos^2\varphi}\cancel{\sin^2\theta}}\cdot\cancel{\cos^2\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\cos\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\cos\theta} \overset{(8)}{=} \left(-\frac{z}{r^2}\frac{x}{r}\right)(-\sin\theta)^{-1} \overset{(1),(3)}{=} \frac{\cancel{r}\cos\theta\,\cancel{r}\cos\varphi\cancel{\sin\theta}}{r^{\cancel{3}}}\frac{1}{\cancel{\sin\theta}} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

mit $\frac{\partial r}{\partial y} \overset{(7)}{=} \frac{y}{r} \overset{(2)}{=} \frac{r\sin\varphi\sin\theta}{r} = \sin\varphi\sin\theta$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\tan\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\tan\varphi} \overset{(9)}{=} \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1} \overset{(1)}{=} \frac{\cos^{\cancel{2}}\varphi}{r\cancel{\cos\varphi}\sin\theta} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\cos\theta}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\cos\theta} \overset{(8)}{=} \left(-\frac{z}{r^2}\frac{y}{r}\right)(-\sin\theta)^{-1} \overset{(2),(3)}{=} \frac{\cancel{r}\cos\theta\,\cancel{r}\sin\varphi\cancel{\sin\theta}}{r^{\cancel{3}}}\frac{1}{\cancel{\sin\theta}} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

mit $\frac{\partial r}{\partial z} \overset{(7)}{=} \frac{z}{r} \overset{(3)}{=} \frac{\cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r}} = \cos\theta$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\tan\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\tan\varphi} \overset{(9)}{=} 0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\cos\theta}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\cos\theta} \overset{(8)}{=} \frac{r - z\cdot\frac{z}{r}}{r^2}\cdot(-\sin\theta)^{-1} \overset{(3)}{=} -\frac{\cancel{r} - \cancel{r}\cos^2\theta}{r^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\overset{(4),(5),(6)}{=} \left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)\cdot\left(\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \left(\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\right)\cdot\left(\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \left(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)\cdot\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

alle Terme außer den unten heben sich weg

$$= \left(\sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta\right) \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$+ \left(\frac{\cos^2\theta \cos^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\theta \sin^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\right) \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$+ \left(\frac{\sin^2\varphi}{r \sin\theta} + \frac{\cos^2\varphi}{r \sin\theta}\right) \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \underline{\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

wenn man mehrmals $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ benutzt