Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

05.06.'16 Theoretische Physik III Blatt 7

Marvin Zanke
Florian Strachwitz
Till Wenigmann

H1) $|\uparrow\rangle = |1,+1\rangle = (1,0,0)$, $|0\rangle = |1,0\rangle = (0,1,0)$, $|\downarrow\rangle = |1,-1\rangle = (0,0,1)$

Wieso gilt $\langle l, m | l, m' \rangle = \delta_{m_l, m_l'}$? (ohne sich die Vektoren anzuschauen)?

Eigenfunktionen von herm. Operatoren $(\hat{L}^2, \hat{L}_z)$

a) $\underbrace{\langle l, m_l | \hat{L}_z | l, m_l' \rangle}_{(\hat{L}_z)_{m_l, m_l'}} = \langle l, m_l | \hbar m_l' | l, m_l' \rangle = \hbar m_l' \underbrace{\langle l, m_l | l, m_l' \rangle}_{\delta_{m_l m_l'}}$

1a	1b	1c	2a	2b	Σ
5/5	3/3	2/2	5/5	5/5	20/20

sehr gut!

$$\Rightarrow \hat{L}_z \hat{=} \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht man das strenger mathematisch? Nach obiger Formel wäre wegen $\delta_{m_l m_l'}$ auf $(\hat{L}_z)_{22}$ ja auch eine 1 oder?

Sorry, verstehe die Frage nicht.

$$\underbrace{\langle l, m_l | \hat{L}_\pm | l, m_l' \rangle}_{(\hat{L}_\pm)_{m_l, m_l'}} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m_l'(m_l' \pm 1)} \underbrace{\langle l, m_l | l, m_l' \pm 1 \rangle}_{\delta_{m_l, m_l' \pm 1}}$$

$m_l = m_l' \pm 1$ bedeutet dass die Zeile eins kleiner (+) bzw. eins größer (−) als die Spalte sein muss (siehe Identifikation Vektoren $\hat{=} m_l$)

Was ist $L_+ |1,+1\rangle$ bei $l=1$? 0

$$\Rightarrow \hat{L}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sqrt{2} = \sqrt{1\cdot(2) - 0\cdot 1}$$

$$\hat{L}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i \hat{L}_2 \Rightarrow \hat{L}_1 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) = -\frac{\hbar i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

5/5

b) $$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = \hat{L}_1 \hat{L}_2 - \hat{L}_2 \hat{L}_1 = -\frac{\hbar^2 i}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$= -\frac{\hbar^2 i}{4}\left\{\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&0&0\\-2&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}\right\} = -\frac{\hbar^2 i}{4}\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$= i\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = i\hbar\hat{L}_3 \text{, passt mit } \boxed{[\hat{L}_1,\hat{L}_2] = \epsilon_{12k}\hat{L}_k\cdot i\hbar}$$

$$[\hat{L}_1,\hat{L}_3] = \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\right\} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

$$= -i\hbar\left(-\frac{\hbar i}{2}\right)\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix} = -i\hbar\hat{L}_2 = i\hbar\,\epsilon_{13k}L_k$$

$$[\hat{L}_2,\hat{L}_3] = -\frac{\hbar^2 i}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= -\frac{\hbar^2 i}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}\right\} = -\frac{\hbar^2 i}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{2}&0\\-\sqrt{2}&0&-\sqrt{2}\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{i\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix} = i\hbar\hat{L}_1 = i\hbar\,\epsilon_{23k}\hat{L}_k$$

3/3

c) $[\hat{H},\hat{L}_i] = 0$, denn:

$$= [\hat{T}+\hat{V},\hat{L}_i] = \underbrace{[\hat{T},\hat{L}_i]}_{(1)} + [\hat{V},\hat{L}_i]$$

Dass (1) $=0$ gilt, haben wir schon gezeigt, denn: $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ Blatt 6, H2a)

$$\Rightarrow (1) = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{L}_i\right] = \frac{1}{2m}[\hat{p}^2,\hat{L}_i] = \frac{1}{2m}\left\{[\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\hat{p}_3^2,\hat{L}_i]\right\} = 0$$

Dass $[\hat{V},\hat{L}_i]=0$ für $\hat{V}=V(r)$ folgt aus:

$$[V(r),\hat{L}_i] = V(r)\hat{L}_i - \hat{L}_i V(r) = V(r)(\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}})_i - (\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}})_i V(r)$$

und $(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{\hbar}{i}(\vec{r}\times\nabla)$ mit $\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

Damit folgt:

mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$:

$$(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{\hbar}{i}(\vec{r}\times\vec{\nabla}) = \frac{\hbar}{i} r\left(\vec{e}_r \times\left[\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\right)$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \text{ denn}$$

$\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$ (trivial)

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin^2\vartheta\sin\varphi - \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \cos^2\vartheta\cos\varphi + \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos^2\varphi + \sin\vartheta\sin^2\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\cos\varphi\cos\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\end{pmatrix} = -\vec{e}_\vartheta$$

Dann folgt aber schon direkt:

$$[V(r), \hat{L}_i] = \frac{\hbar}{i}V(r)(\vec{r}\times\vec{\nabla})_i - \frac{\hbar}{i}(\vec{r}\times\vec{\nabla})_i V(r)$$

$$= \frac{\hbar}{i}V(r)(\vec{r}\times\vec{\nabla})_i - \frac{\hbar}{i}V(r)(\vec{r}\times\vec{\nabla})_i = 0$$

✓

denn es kommt keine Ableitung nach r in $\hat{L}_i$ vor!

Daraus folgt trivialerweise sofort: $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$ ✓

und

$[\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2] = 0$ ✓

2/2

A2)

a) $[\hat{a}_+, \hat{a}_+] = 0$ und $[\hat{a}_-, \hat{a}_-] = 0$ trivial

Wieso benutzt man kein $\hat{a}_3$ für $\hat{a}_+$ oder $\hat{a}_-$?* Trotzdem zeigen dass Kommutatoren verschwinden??

*Wir wollen ja später ↳ damit bauen.

Für die anderen Relationen stellen wir zuerst fest:

$$\underline{[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+]} = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_1 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right), \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_1 - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right)\right]$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left[\hat{x}_1, -\frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right] + \left[\frac{i}{m\omega}\hat{p}_1, \hat{x}_1\right]\right\}$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{-\left[\hat{x}_1, \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right] + \left[\frac{i}{m\omega}\hat{p}_1, \hat{x}_1\right]\right\}$$

$$= \frac{i}{2\hbar}\cdot 2[\hat{p}_1, \hat{x}_1] = 1, \text{ denn } [\hat{p}_1, \hat{x}_1] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{x}_1 - \hat{x}_1\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$= \frac{\hbar}{i}$$

$[x_i, p_j] = 0$ für $i \neq j$ oder? ja

$$\underline{[\hat{a}_1, \hat{a}_2^+]} = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[\hat{x}_1 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1, \hat{x}_2 - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\right] = 0, \text{ da}$$

verschiedene Komponenten von Ort/Impuls miteinander kommutieren.

„Zirkulare Polarisation"?

Analog $\underline{[\hat{a}_1, \hat{a}_2]} = \underline{[\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+]} = 0 = \underline{[\hat{a}_2, \hat{a}_1^+]} \cdot [\hat{a}_i, \hat{a}_i] = [\hat{a}_i^+, \hat{a}_i^+]$

$$\underline{[\hat{a}_2, \hat{a}_2^+]} = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[\hat{x}_2 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2, \hat{x}_2 - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\right]$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left[\hat{x}_2, -\frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\right] + \left[\frac{i}{m\omega}\hat{p}_2, \hat{x}_2\right]\right\}$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\cdot 2\left[\frac{i}{m\omega}\hat{p}_2, \hat{x}_2\right] = \frac{i}{\hbar}[\hat{p}_2, \hat{x}_2] = \frac{i}{\hbar}\cdot\frac{\hbar}{i} = 1$$

Ich glaube ich habe die Frage auf dem letzten Zettel schon gestellt, aber der ist noch bei dir und ich bin mir nicht sicher: Was wenn partielle Ableitungen nicht vertauschen? Dann gilt nicht $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ oder?

Bei uns vertauschen die immer.

Dann folgt:

$$[a_+, a_+^+] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^+ - i\hat{a}_2^+)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\hat{a}_1 + i\hat{a}_2, \hat{a}_1^+ - i\hat{a}_2^+]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+] + [\hat{a}_2, \hat{a}_2^+] + i[\hat{a}_2, \hat{a}_1^+] - i[\hat{a}_1, \hat{a}_2^+]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + 1 + 0 - 0\right\} = 1$$

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_-^+] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1 - i\hat{a}_2, \hat{a}_1^+ + i\hat{a}_2^+]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+] + [\hat{a}_2, \hat{a}_2^+] + i[\hat{a}_1, \hat{a}_2^+] - i[\hat{a}_2, \hat{a}_1^+]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + 1 + 0 - 0\right\} = 1$$

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_-] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1 + i\hat{a}_2, \hat{a}_1 - i\hat{a}_2] = \frac{1}{2}\{[\hat{a}_1, -i\hat{a}_2] + [i\hat{a}_2, \hat{a}_1]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-i[\hat{a}_1, \hat{a}_2] + i[\hat{a}_2, \hat{a}_1]\} = i[\hat{a}_2, \hat{a}_1] = 0$$

$$[\hat{a}_+^+, \hat{a}_-^+] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1^+ - i\hat{a}_2^+, \hat{a}_1^+ + i\hat{a}_2^+] = \frac{1}{2}\{[\hat{a}_1^+, i\hat{a}_2^+] + [-i\hat{a}_2^+, \hat{a}_1^+]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{i[\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+] - i[\hat{a}_2^+, \hat{a}_1^+]\} = 0$$

$$[\hat{a}_+, \hat{a}_-^+] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1 + i\hat{a}_2, \hat{a}_1^+ + i\hat{a}_2^+] = \frac{1}{2}\{[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+] - [\hat{a}_2, \hat{a}_2^+]$$
$$+ i[a_1, \hat{a}_2^+] + i[\hat{a}_2, \hat{a}_1^+]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - 1 + 0 + 0\} = 0$$

$$[\hat{a}_-, a_+^+] = \frac{1}{2}[\hat{a}_1 - i\hat{a}_2, \hat{a}_1^+ - i\hat{a}_2^+] = \frac{1}{2}\{[\hat{a}_1, \hat{a}_1^+] - [a_2, \hat{a}_2^+]$$
$$- i[\hat{a}_2, \hat{a}_1^+] - i[\hat{a}_1, \hat{a}_2^+]\}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 - 1 - 0 - 0\} = 0$$

5/5

b) $N_- = \hat{a}_-^+ \hat{a}_-$, $N_+ = \hat{a}_+^+ \hat{a}_+$

$$\hat{L}_3 \doteq \hbar(\hat{N}_- - \hat{N}_+) = \hbar\left\{(\hat{a}_- \hat{a}_-^+ - 1) - (\hat{a}_+ \hat{a}_+^+ - 1)\right\}$$

↑ Kommutatorrelationen

Was bringen mir die ganzen Kommutatorrelationen aus der a)? z.B. $[N_-, N_+] = 0$ (braucht man denke ich streng genommen für die Begründung unten)

$$= \hbar\left\{\frac{1}{2}(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2)(\hat{a}_1^+ + i\hat{a}_2^+) - \frac{1}{2}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2)(\hat{a}_1^+ - i\hat{a}_2^+)\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left\{\hat{a}_1\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2\hat{a}_2^+ - i\hat{a}_2\hat{a}_1^+ + i\hat{a}_1\hat{a}_2^+ - \hat{a}_1\hat{a}_1^+ - \hat{a}_2\hat{a}_2^+ + i\hat{a}_1\hat{a}_2^+ - i\hat{a}_2\hat{a}_1^+\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left\{2i\hat{a}_1\hat{a}_2^+ - 2i\hat{a}_2\hat{a}_1^+\right\} = i\hbar\left\{\hat{a}_1\hat{a}_2^+ - \hat{a}_2\hat{a}_1^+\right\}$$

$$= i\hbar\left\{\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}_1 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right)\left(\hat{x}_2 - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\right) - \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}_2 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\right)\left(\hat{x}_1 - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\right)\right\}$$

$$= \frac{m\omega i}{2}\left\{\left(\hat{x}_1\hat{x}_2 + \left(\frac{1}{m\omega}\right)^2\hat{p}_1\hat{p}_2 - \frac{i}{m\omega}\hat{x}_1\hat{p}_2 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\hat{x}_2\right) - \left(\hat{x}_2\hat{x}_1 + \left(\frac{1}{m\omega}\right)^2\hat{p}_2\hat{p}_1 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_2 x_1 - \frac{i}{m\omega}\hat{x}_2\hat{p}_1\right)\right\}$$

$$= im\omega\left\{-\frac{i}{m\omega}\hat{p}_2\hat{x}_1 + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_1\hat{x}_2\right\}$$

$$= \left\{\hat{p}_2\hat{x}_1 - \hat{p}_1\hat{x}_2\right\} = \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1 = \epsilon_{3kl}\hat{x}_k\hat{p}_l = \hat{L}_3$$

Kann man das auch einfacher sehen von $\boxed{\hat{L}_3 = \epsilon_{3kl}x_k p_l}$ ausgehend in die andere Richtung zeigen dass $\hat{L}_3 = \hbar(N_- - N_+)$? ich glaube nicht...

Da nun $\hat{L}_3 = \hbar(\hat{N}_- - \hat{N}_+)$ und mit $N_- = a_-^+ a_-$, $N_+ = a_+^+ a_+$,

wobei $[\hat{a}_+, \hat{a}_+^+] = [\hat{a}_-, \hat{a}_-^+] = 1$,

die gleichen Voraussetzungen wie für $\hat{a}^+\hat{a}$ aus der Vorlesung gegeben sind, zeigt man hier analog, dass ~~für den harmonischen Oszillator~~ gilt dass N_- und N_+ ganzzahlige positive Eigenwerte haben und damit $(N_- - N_+) \in \mathbb{Z}$ □

5/5

Was heißt dass h.o. nur „Hilfs-Kommutator" ist? Gilt das immer? Wieso erwähnen wir dann dass es der harm. Osz. ist?

Wir benutzen eben nicht dass es der harm. Osz. ist. Wir haben ja nirgends benutzt was für einen Hamiltonian wir haben um auf $\hat{L}_3 = \hbar(\hat{N}_- - \hat{N}_+)$ zu kommen. Das gilt also immer.

Und dass $\hat{N}$ ganzzahlige Eigenwerte hat, hat auch nichts mit dem Hamiltonian zu tun.

(Das sind halt nur nicht unbedingt gleichzeitig EV von H, aber das macht ja nichts.)