Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

21.06.16

Theoretische Physik III Blatt 9

Marvin Zanke
Till Wenigmann
Florian Strackwitz

SORRY SCHONMAL FÜR DIE VIELEN FRAGEN UND VIELEN DANK FÜR DEINE ZEIT ... Kein Problem, ist ja mein Job ☺

H1)

a) $\hat{j}_\pm = \hat{j}_{1,\pm} + \hat{j}_{2,\pm}$

woher kommt die Relation mit der Summe? $*_1$ siehe Blatt am Ende

$$\underbrace{\hat{j}_\pm \,|(j_1 j_2) j m>}_{\text{wirkt auf } m \mapsto m\pm 1} = \hat{j}_\pm \sum_{\tilde{m}_1,\tilde{m}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\,|j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>$$

$$= \sum_{\tilde{m}_1,\tilde{m}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\,\underbrace{j_\pm |j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>}_{(\hat{j}_{1,\pm} + \hat{j}_{2,\pm})|j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>}$$

wirken jeweils auf $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$: $\tilde{m}_i \mapsto \tilde{m}_i \pm 1$

1a	1b	1c	2a	2b	2c	Σ
3/3	1/1	6/6	1/1	6/6	2/3	19/20

sehr gut!

Wirkungsweise $j_\pm,\ j_{1,\pm}, j_{2,\pm}$

muss man diese Relation (wie $j_\pm$ wirkt) hier nochmal herleiten? nein!

Wieso gilt das jetzt eigentlich wieder genau so für $j_\pm = j_{1\pm} + j_{2\pm}$ wenn es für j_1 und j_2 gilt? $*_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|(j_1 j_2) j (m\pm 1)>$$

$$= \sum_{\tilde{m}_1\tilde{m}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\Big\{\sqrt{j_1(j_1+1) - \tilde{m}_1(\tilde{m}_1 \pm 1)}\,|j_1 (\tilde{m}_1 \pm 1); j_2 \tilde{m}_2>$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1) - \tilde{m}_2(\tilde{m}_2 \pm 1)}\,|j_1 \tilde{m}_1; j_2 (\tilde{m}_2 \pm 1)>\Big\}$$ ✓

Projektion auf $<j_1 m_1; j_2, m_2|$ liefert dann:

$$\Leftrightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,<j_1 m_1; j_2 m_2|(j_1 j_2) j (m\pm 1)>$$

$$= \sum_{\tilde{m}_1\tilde{m}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\Big\{\sqrt{j_1(j_1+1) - \tilde{m}_1(\tilde{m}_1 \pm 1)}\,\overbrace{<j_1 m_1; j_2 m_2|j_1 (\tilde{m}_1 \pm 1); j_2 \tilde{m}_2>}^{\delta_{m_1 \tilde{m}_1\pm 1}\,\delta_{m_2 \tilde{m}_2}}$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1) - \tilde{m}_2(\tilde{m}_2 \pm 1)}\,\underbrace{<j_1 m_1; j_2 m_2|j_1 \tilde{m}_1; j_2 (\tilde{m}_2 \pm 1)>}_{\delta_{m_1 \tilde{m}_1}\,\delta_{m_2 \tilde{m}_2\pm 1}}$$

$m_1 = \tilde{m}_1 \pm 1 \Leftrightarrow \tilde{m}_1 = m_1 \mp 1$

$m_2 = \tilde{m}_2 \pm 1 \Leftrightarrow \tilde{m}_2 = m_2 \mp 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\; C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$$

damit Beitrag

$$= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1)}\; C(j_1 j_2 j; (m_1 \mp 1) m_2 m)$$
$$+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1)}\; C(j_1 j_2 j; m_1 (m_2 \mp 1) m)$$ ✓ gut

3/3

woher wissen wir dass die normiert sind? $*_3$

b) $\underbrace{<(j_1 j_2) j m|(j_1 j_2) j m> = 1}_{(1)}$, $\underbrace{<j_1 m_1; j_2 m_2|j_1 m_1; j_2 m_2> = 1}_{(2)}$

A priori CGC nicht reell (siehe unten), wieso können wir das annehmen? $*_4$

$<(j_1 j_2) j m|j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>$ (*) $= C(j_1 j_2 j; \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)$

$$(1) \Leftrightarrow 1 = \sum_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\,<(j_1 j_2) j m|j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>$$

$$= \sum_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} \sum_{\tilde{\tilde{m}}_1 \tilde{\tilde{m}}_2} C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)\, C^*(j_1 j_2 j;\tilde{\tilde{m}}_1 \tilde{\tilde{m}}_2 m)\,\underbrace{<j_1 \tilde{\tilde{m}}_1; j_2 \tilde{\tilde{m}}_2|j_1 \tilde{m}_1; j_2 \tilde{m}_2>}_{=1 \text{ nach (2) gilt } \tilde{\tilde{m}}_1 = \tilde{m}_1,\ \tilde{\tilde{m}}_2 = \tilde{m}_2}$$

(*) Was wenn ich hier nicht $<(j_1 j_2) j m| = (\sum C \ldots)^*$ einsetze sondern (*)

$$= \sum_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} |C(j_1 j_2 j;\tilde{m}_1 \tilde{m}_2 m)|^2 \quad ; \tilde{m}_1 = m_1,\ \tilde{m}_2 = m_2$$ und die Behauptung folgt

c) $j_1 = 1,\ j_2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{z.B.}} j = \frac{3}{2}$

$\underline{m = \frac{3}{2}}$: $m_1 = 1,\ m_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2})}_{= C^{3/2\ 3/2}_{1\,1\,1/2\,1/2}} > 0$

wieso ist genau der $C^{jj}_{j_1 j_1 j_2 (j-j_1)} > 0$ gewählt?

Konvention...

Da nur eine Möglichkeit für $m_1 + m_2 = m$, muss schon gelten (normiert!): $C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2}) = 1$

Alle anderen CGC sind null für $m_1 + m_2 \neq m$ ✓

$\underline{m = \frac{1}{2}}$: $m_1 = 1,\ m_2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ {-\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{2})$

$m_1 = 0,\ m_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})$

Mit analogem Argument. Dann erhält man:

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1;\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2})$$

$$= \sqrt{2 - 1\cdot 0}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) + \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ {-\tfrac{1}{2}},\ \tfrac{1}{2})$$

Was wäre wenn Koeff. hier z.B. irgendwie null - Was ist dann $C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ {-\tfrac{3}{2}}\ \tfrac{1}{2})$? ist ja nicht erlaubt, da $m_2 = -\frac{3}{2}$ nicht geht oder?

Verstehe die Frage nicht...

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2})}_{=1} = \sqrt{2}\ \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})}_{=: x} + \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 1\ {-\tfrac{1}{2}}\ \tfrac{1}{2})}_{=: y}$$

Da normiert und dies die einzigen beiden Kombinationen sind gilt auch $x^2 + y^2 = 1$, $\sqrt{3} = \sqrt{2}x + y \Leftrightarrow y = \sqrt{3} - \sqrt{2}x$

$$\Rightarrow x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2}x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \tfrac{2}{3}\sqrt{6}x + \tfrac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6} \pm \sqrt{\tfrac{6}{9} - \tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \pm 0 \checkmark$$

wieso hier jetzt nur eine Möglichkeit für x und nicht wie sonst immer $x_{1/2} = \pm k$...

$$\Rightarrow y = \sqrt{3} - \sqrt{\tfrac{4}{3}} \Rightarrow y^2 = 3 + \tfrac{4}{3} - 2\sqrt{4} = \tfrac{1}{3}$$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Da offensichtlich $(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}) > 0$ gilt

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \checkmark$$

$\underline{m = -\frac{1}{2}}$: $m_1 = -1,\ m_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}})$

$m_1 = 0,\ m_2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ {-\tfrac{1}{2}}\ {-\tfrac{1}{2}})$

(*) genau wie diese, die 3/2 dort! hier eigentlich doch gar nicht stehen oder?

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{4}}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}})$$

$$= \sqrt{2 - 0}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) + \sqrt{\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2})$$ (*)

$$\Leftrightarrow 2\,C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}) = \sqrt{2}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2});$$

Mit dem vorigen CGC folgt dann auch:

$$C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,\tfrac12\,-\tfrac12)=\frac{1}{\sqrt2}\,C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,\tfrac12\,\tfrac12)$$

$$\Longrightarrow C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,\tfrac12\,-\tfrac12)=\sqrt{\tfrac13}\ ✓$$

~~und~~ $\cancel{a^2+b^2=1}$ $\quad\cancel{b=\sqrt{\tfrac83}-\sqrt2\,a}$

$$\cancel{\Rightarrow a^2+\left(\sqrt{\tfrac83}-\sqrt2 a\right)^2=1 \Leftrightarrow a^2+\tfrac83+2a^2-2\sqrt{\tfrac{16}{3}}\,a=1}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow 3a^2-\tfrac{8}{\sqrt3}a+\tfrac53=0 \Leftrightarrow a^2-\tfrac{8}{\sqrt{27}}a+\tfrac59=0}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow a_{1,2}=\tfrac{4}{\sqrt{27}}\pm\sqrt{\tfrac{16}{27}-\tfrac59}=\tfrac{4\pm1}{\sqrt{27}}}$$

Ich hab noch nicht so ganz verstanden, wie man bei den CGC systematisch vorgeht um die Koeff. zu ermitteln. Siehe Anhang...

Da wieder $\left(C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,\tfrac12\,-\tfrac12)\right)^2+\left(C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,-\tfrac12\,-\tfrac12)\right)^2=1$

folgt sofort, dass $C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,-\tfrac12\,-\tfrac12)=\pm\sqrt{\tfrac23}$.

Für das Vorzeichen betrachten wir:

$$\sqrt{\tfrac32\cdot\tfrac52+\tfrac14}\;C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,-\tfrac12\,-\tfrac12)$$

$$=\sqrt{2-0}\,\underbrace{C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;1\,-\tfrac12\,\tfrac12)}_{\sqrt{\frac13}}+\sqrt{\tfrac34+\tfrac14}\,\underbrace{C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,\tfrac12\,\tfrac12)}_{\sqrt{\frac23}}$$

$$\Leftrightarrow 2\,C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0,-\tfrac12\,-\tfrac12)=\sqrt2\sqrt{\tfrac13}+\sqrt{\tfrac23}=2\sqrt{\tfrac23}$$

$$\Leftrightarrow C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,-\tfrac12\,-\tfrac12)=\sqrt{\tfrac23}\ ✓$$

$m=-\tfrac32$: Hier ist wegen der Normier-Relation vom Plan klar, dass gilt: $C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,-\tfrac12\,-\tfrac32)=\pm1$

Außerdem: $\sqrt{\tfrac{15}{4}-\tfrac34}\;C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,-\tfrac12\,-\tfrac32)$

$$=\sqrt{2-0}\,\underbrace{C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;0\,-\tfrac12\,-\tfrac12)}_{\sqrt{\frac23}}+\sqrt{\tfrac34+\tfrac14}\,\underbrace{C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,\tfrac12\,-\tfrac12)}_{\sqrt{\frac13}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt3\,C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,-\tfrac12\,-\tfrac32)=\sqrt{\tfrac43}+\sqrt{\tfrac13}=\sqrt3$$

$$\Leftrightarrow C(1\,\tfrac12\,\tfrac32;-1\,-\tfrac12\,-\tfrac32)=1\ ✓$$

In üblicher Manier ergibt sich damit:

$m=\frac32$		j
		$\frac32$
m_1,m_2	$1,\frac12$	1

$m=\frac12$		j	
		$\frac32$	$\frac12$
m_1,m_2	$1,-\frac12$	$\sqrt{\frac13}$	⋮
	$0,\frac12$	$\sqrt{\frac23}$	

6/6

Da $C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)=(-1)^{\overset{}{\underset{=0}{(j_1+j_2-j)}}}\,C(j_1 j_2 j;-m_1\,-m_2\,-m)$

folgen die gleichen CGC für $m=-\tfrac32$ und $m=-\tfrac12$!

FRAGE

Ich habe total das Problem bei der Aufgabe gehabt; irgendwie ist mir kein klares System dahinter zu erkennen, wie man jetzt einen bestimmten unbekannten CGC bestimmt. Manchmal klappt es irgendwie, wenn man die LHS der Gleichung so wählt, dass dort der gesuchte CGC steht und man die RHS bereits komplett kennt. Ein anderes Mal wählt man die Koeffizienten so, dass die LHS verschwindet, und man sich aus der RHS dann irgendwie inklusive Normierungsbedingung die CGC bastelt. Für mich war das total das Ratespiel und hat ewig gedauert. Gibt es da irgendwie einen Trick?

Ich finde das mit der Rekursionsformel auch alles etwas unübersichtlich. Ich finde es auch doof, dass so Probleme wie das unten auftreten können. (Vielleicht tritt dieses Problem aber auch nur bei den negativen m auf die man eh leichter aus den positiven bestimmt.) Es gibt aber auch andere Methoden die CGCs zu bestimmen, die mir deutlich besser gefallen. Ich hab dir mal ein paar Seiten aus dem Shankar kopiert. Vielleicht sagt dir das ja auch mehr zu. (Im Prinzip sehr ähnlich zu hier nur systematischer.)

UND folgendes Problem. Bei $m = -\frac{1}{2}$ habe ich erst was anderes versucht:

$\underline{m = -\frac{1}{2}}$: $\quad m_1 = -1,\ m_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})$

$\quad m_1 = 0,\ m_2 = -\frac{1}{2} \longrightarrow C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{4}}\ \overbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})}^{=\sqrt{2/3},\ \text{bereits bekannt}}$$

$$= \sqrt{2-0}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ -1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}) + \sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}}\ C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{2}\ \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2}\ -1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})}_{=:a} + \underbrace{C(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2};\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})}_{=:b}$$

$a^2 + b^2 = 1$ wg. der Bedingung auf dem Zettel

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \sqrt{2}\,a + b \ \Leftrightarrow\ b = \sqrt{\tfrac{8}{3}} - \sqrt{2}\,a$$

$$a^2 + \left(\sqrt{\tfrac{8}{3}} - \sqrt{2}\,a\right)^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ a^2 + \tfrac{8}{3} + 2a^2 - 2\sqrt{\tfrac{16}{3}}\,a = 1$$

$$\Leftrightarrow\ 3a^2 - 8\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{5}{3} = 0 \ \Leftrightarrow\ a^2 - \tfrac{8}{\sqrt{27}} + \tfrac{5}{9} = 0$$

$$\Rightarrow\ a_{1/2} = \tfrac{4}{\sqrt{27}} \pm \sqrt{\tfrac{16}{27} - \tfrac{5}{9}}$$

$$= \tfrac{4}{\sqrt{27}} \pm \tfrac{1}{\sqrt{27}}$$ Da ich das Ergebnis kenne, weiß ich

Ich sehe auch nur die Möglichkeit es so zu machen, wie du es vorne gemacht hast.

Zwar [illegible]

Ich habe doch bereits alles genutzt, was wir wissen ??

$*_1$ Welche Relation mit der Summe? Meinst du

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C(j_1 j_2 j, m_1 m_2 m) \, |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \; ? \quad (**)$$

Das kommt von

$$|(j_1 j_2) j m\rangle = \underbrace{\sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1, j_2 m_2|}_{\mathbb{1}} (j_1 j_2) j m\rangle$$

(über j_1, j_2 muss ich nicht summieren, da $\langle \tilde{j}_1 m_1, \tilde{j}_2 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle = 0$ für $\tilde{j}_1 \neq j_1, \tilde{j}_2 \neq j_2$

$$= \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | (j_1 j_2) j m\rangle}_{C(j_1 j_2 j, m_1 m_2 m)} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$$

$*_2$ Ich bin nicht ganz sicher, ob ich die Frage richtig verstehe: Du meinst

warum $j_\pm |(j_1 j_2) j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \, |(j_1 j_2) j m \pm 1\rangle$ gilt wenn

$j_{i\pm} |j_i m_i\rangle = \sqrt{j_i(j_i+1) - m_i(m_i \pm 1)} \, |j_i m_i \pm 1\rangle$ (*) gilt?

Na ja, $|(j_1 j_2) j m\rangle$ ist ja genau die Eigenbasis zu j^2 und j_z, also zum Gesamtdrehimpuls. Da dieser natürlich (davon kannst du dich leicht überzeugen) die normale Drehimpulsalgebra befolgt, wirken die entsprechenden Operatoren auch "ganz normal" auf die Eigenzustände. Das gilt insbesondere für

$$j_\pm = j_x \pm i j_y = j_{1x} + j_{2x} \pm i(j_{1y} + j_{2y}) = (j_1 \pm i j_{1y}) + (j_{2x} \pm i j_{2y})$$
$$= j_{1\pm} + j_{2\pm}$$

Beantwortet das die Frage?

$*_3$ $|jm\rangle$ sind immer die <u>normierten</u> Eigenzustände von j^2 und j_z. Davon geht man immer aus. (Daher kommen auch die ganzen Normierungsfaktoren wie z.B. bei Gl. (*)).

$*_4$ Vielleicht gibt es ein eleganteres Argument, aber ich würde das so sehen:

Die CGC geben ja den Zusammenhang zwischen den beiden Basen an über (**).

Physikalisch ist aber $|(j_1 j_2) j m\rangle$ und $e^{i\varphi} |(j_1 j_2) j m\rangle$ der selbe Zustand.

Das heißt diese Gesamtphase ist wirklich einfach Konvention und wir können sie so wählen, dass zumindest ein CGC reell ist. Da aber alle CGC zusammenhängen (über die Rekursionsbeziehung) sind dann schon alle reell.

H2)

a) $\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) u_l(\rho) = 0$ (*)

Folgt das $\rho_0 = 2n$ hier irgendworaus? $*_1$

$\rho = \frac{\bar\rho}{n}$, $\rho_0 = 2n$; $\frac{d}{d\rho} = \frac{d}{d\bar\rho}\frac{d\bar\rho}{d\rho}$ bzw. $\frac{d\bar\rho}{d\rho}\frac{d}{d\bar\rho}$ (besser) $= n\frac{d}{d\bar\rho}$

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{d\bar\rho^2} n^2 - \frac{l(l+1)}{\bar\rho^2} n^2 + \frac{2n^2}{\bar\rho} - 1\right) \underbrace{u_l\left(\frac{\bar\rho}{n}\right)}$ $= 0$

Ist dann auch eine Funktion von $\bar\rho$, genau genommen aber andere Funktion. Oder?

$f(r) = \frac{r}{r_0} = f(\frac{r}{r_0}) = f(x)$, $= x$

andere Fkt?

Warum u Reskalierung? Woher kommt das n? (siehe $*_1$)

$\Leftrightarrow n^2 u_l''(\bar\rho) = \left(n^2 \frac{l(l+1)}{\bar\rho^2} - n^2 \frac{2}{\bar\rho} + 1\right) u_l(\bar\rho)$

$\Leftrightarrow u_l''(\bar\rho) = \left(\frac{l(l+1)}{\bar\rho^2} - \frac{2}{\bar\rho} + \frac{1}{n^2}\right) u_l(\bar\rho)$

$\longrightarrow$ Streng genommen andere Fkt oder? ja

1/1

b) $u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^q\, u_{nl}''(\bar\rho) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{\bar\rho} + \frac{l(l+1)}{\bar\rho^2}\right) u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^q\, u_{nl}(\bar\rho)$

Kommutieren $\bar\rho^q$ und $u_{nl}(\rho)$ ohne Probleme? das sind ja Zahlen

Integrieren liefert jeweils:

RHS: $\int_0^\infty d\bar\rho \left\{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{\bar\rho} + \frac{l(l+1)}{\bar\rho^2}\right\} \left[u_{nl}(\bar\rho)\right]^2 \bar\rho^q$

$= \frac{1}{n^2}\int_0^\infty d\bar\rho \left[u_{nl}(\bar\rho)\right]^2 \bar\rho^q - 2\int_0^\infty d\bar\rho \left[u_{nl}(\bar\rho)\right]^2 \bar\rho^{q-1} + l(l+1)\int_0^\infty d\bar\rho \left[u_{nl}(\bar\rho)\right]^2 \bar\rho^{q-2}$

$= \frac{1}{n^2}\langle q\rangle - 2\langle q-1\rangle + l(l+1)\langle q-2\rangle$ ✓

War normalerweise nicht immer $\langle x\rangle = \int \dots x \dots$ ohne x^q? Gilt dann hier $\langle 1\rangle = \langle x\rangle$? ja (bzw $\langle 1\rangle = \langle\bar\rho\rangle$ um genau zu sein..)

LHS: $\int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}''(\bar\rho)\, u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^q = \left[u_{nl}'(\bar\rho) u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^q\right]_0^\infty - \int_0^\infty u_{nl}'(\bar\rho)\left\{q\bar\rho^{q-1} u_{nl}(\bar\rho) + \bar\rho^q u_{nl}'(\bar\rho)\right\} d\bar\rho$

$= -\underbrace{\int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}'(\bar\rho)\,\bar\rho^q\, u_{nl}'(\bar\rho)}_{(1)} - q\underbrace{\int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}'(\bar\rho)\,\bar\rho^{q-1}\, u_{nl}(\bar\rho)}_{(2)}$ ✓

(2) $= \left[u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^{q-1} u_{nl}(\bar\rho)\right]_0^\infty - \int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}(\bar\rho)\left\{(q-1)\bar\rho^{q-2} u_{nl}(\bar\rho) + \bar\rho^{q-1} u_{nl}'(\bar\rho)\right\}$

$\Leftrightarrow 2\int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}'(\bar\rho)\,\bar\rho^{q-1} u_{nl}(\bar\rho) = -(q-1)\underbrace{\int u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^{q-2} u_{nl}(\bar\rho)}_{\langle q-2\rangle}$

$\Leftrightarrow \int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^{q-1} u_{nl}'(\bar\rho) = -\frac{(q-1)}{2}\langle q-2\rangle$ ✓

$\left[q \mapsto q+1 \text{ gilt auch} \Leftrightarrow \int_0^\infty d\bar\rho\, u_{nl}(\bar\rho)\,\bar\rho^q\, u_{nl}'(\bar\rho) = -\frac{q}{2}\langle q-1\rangle \right]$

$$(1) := \int_0^\rho d\bar\rho\, \bar\rho^{q} (u_{nl}'(\bar\rho))^2 = \left[\frac{1}{q+1}\bar\rho^{q+1}(u_{nl}'(\bar\rho))^2\right]\Big|_0^\infty - \int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{1}{q+1}\bar\rho^{q+1}\cdot 2u_{nl}'(\bar\rho)\,u_{nl}''(\bar\rho)$$

$$= -2\int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1} u_{nl}'(\bar\rho)\,u_{nl}''(\bar\rho)$$

Wieso können wir Oberfl.-terme vernachlässigen? Insbesondere für u_{nl}'? u_{nl} ist ja eine Schwartz-Funktion

$$\Rightarrow \underline{LHS} = -(1) - q(2) = 2\int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1} u_{nl}'(\bar\rho)\,u_{nl}''(\bar\rho) + q\,\frac{q-1}{2}\langle q-2\rangle$$

$$= \frac{1}{2}q(q-1)\langle q-2\rangle + \int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1}\cdot 2u_{nl}''(\bar\rho)\,u_{nl}'(\bar\rho)$$

Mit DGL (2) folgt:

$$\frac{\langle q\rangle}{n^2} - 2\langle q-1\rangle + l(l+1)\langle q-2\rangle = \frac{1}{2}q(q-1)\langle q-2\rangle + \int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1} \underbrace{2u_{nl}'(\bar\rho)\left\{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{\bar\rho} + \frac{l(l+1)}{\bar\rho^2}\right\}u_{nl}(\bar\rho)}_{=(u_{nl}^2(\bar\rho))'}$$

$$\Rightarrow \langle q-2\rangle\left\{\frac{1}{2}q(q-1) - l(l+1)\right\} + 2\langle q-1\rangle - \frac{\langle q\rangle}{n^2} + \int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1}\left\{\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{(1)} \underbrace{- \frac{2}{\bar\rho}}_{(2)} + \underbrace{\frac{l(l+1)}{\bar\rho^2}}_{(3)}\right\}(u_{nl}^2(\bar\rho))' = 0 \quad (*)$$

$$(1) = \frac{1}{n^2}\int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1}(u_{nl}^2(\bar\rho))' = \frac{1}{n^2}\left\{\left[u_{nl}^2(\bar\rho)\,\frac{\bar\rho^{q+1}}{q+1}\right]_0^\infty - \int_0^\rho d\bar\rho\, \bar\rho^{q} u_{nl}^2(\bar\rho)\right\}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\langle q\rangle$$

$$(2) = -2\int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{1}{q+1}\bar\rho^{q}(u_{nl}^2(\bar\rho))' \overset{\text{analog}}{=} 2\,\frac{q}{q+1}\int d\bar\rho\, \bar\rho^{q-1} u_{nl}^2(\bar\rho)$$

$$= \frac{2q}{q+1}\langle q-1\rangle$$

$$(3) = l(l+1)\int_0^\rho d\bar\rho\, \frac{1}{q+1}\bar\rho^{q-1}(u_{nl}^2(\bar\rho))' = -l(l+1)\frac{q-1}{q+1}\langle q-2\rangle$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \langle q-2\rangle\left\{\frac{1}{2}q(q-1) - l(l+1) - l(l+1)\frac{q-1}{q+1}\right\} + \langle q-1\rangle\left\{2 + \frac{2q}{q+1}\right\} - \langle q\rangle\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right\} = 0$$

$\cdot 2\cdot n^2\cdot(q+1)$:

$$\Leftrightarrow \langle q-2\rangle n^2\left\{q(q-1)(q+1) - 2(q+1)l(l+1) - 2l(l+1)(q-1)\right\} + \langle q-1\rangle n^2\left\{4(q+1) + 4q\right\} - 4\langle q\rangle(q+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle q-2\rangle n^2\left\{q(q-1)(q+1) - 2l(l+1)[\underbrace{(q+1)+(q-1)}_{2q}]\right\} + 4\langle q-1\rangle n^2(2q+1) - 4(q+1)\langle q\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(q+1)\langle q\rangle - 4n^2(2q+1)\langle q-1\rangle - n^2 q\left[(q^2-1) - 4l(l+1)\right]\langle q-2\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(q+1)\langle q\rangle - 4n^2(2q+1)\langle q-1\rangle + n^2 q\left[(2l+1)^2 - q^2\right]\langle q-2\rangle = 0$$

6/6

*₁ Wir sollen ja Lösungen u_{nl} anschauen. Wegen des n wissen wir, dass es Energieeigenzustände sein sollen. Es folgt

$$\rho_0 = \frac{2m\gamma}{\hbar\varkappa} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(-E_n)}} \underset{E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}}{=} 2n$$

(müsstet ihr alles in der Vorlesung gehabt haben) c)

$$\langle q \rangle = \int_0^\infty d\rho \, [u_{nl}(\rho)]^2 \rho^q$$

$$\langle \psi_{nlm} | \left(\tfrac{r}{a_0}\right)^q | \psi_{nlm} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r}{a_0}\right)^q \frac{u_l^*(r)}{r} \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}^*(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) r^2 \sin\theta$$

Ich krieg das doch nicht mehr hin... was passiert denn mit der Funkt. determinante? $\int d\varphi d\theta \sin\theta Y_{lm}^* Y_{lm} \neq 0$ oder? Das r^2 kürzt sich ja mit $\frac{u}{r} \cdot \frac{u}{r}$ ...

...

$$\int d\varphi \, d\theta \, Y_{lm}^* Y \sin\theta = \underline{1}$$

die sind normiert (also auch u...)

Ist das hier wieder normiert?

$$\langle 0 \rangle = \int_0^\infty [u_{nl}(\rho)]^2 d\rho \overset{\langle \psi_{nlm} | \psi_{nlm} \rangle}{=} 1$$

$\underline{q=0}$: $4\langle 0 \rangle - 4n^2 \langle -1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \boxed{\langle -1 \rangle} = \frac{1}{n^2}\langle 0 \rangle = \frac{1}{n^2}$ ✓

$\underline{q=1}$: $8\langle 1 \rangle - 12n^2\langle 0 \rangle + n^2(4l^2+4l)\langle -1 \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \langle 1 \rangle = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n^2}{2} l(l+1)\frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \langle 1 \rangle = \frac{3}{2}n^2 - \frac{l(l+1)}{2} \Leftrightarrow \boxed{\langle 1 \rangle} = \frac{1}{2}(3n^2 - l(l+1))$$ ✓

Was genau ist hier denn jetzt n und l?

Hauptquantenzahl ganz normal. Drehimpuls

Warum?

$\underline{q=2}$: $12\langle 2 \rangle - 20n^2\langle 1 \rangle + 2n^2(4l^2+4l-3)\langle 0 \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \langle 2 \rangle = \frac{5}{3}n^2 \frac{1}{2}(3n^2 - l(l+1)) - \frac{1}{6}n^2(4l^2+4l-3)$$

$$= \frac{5}{6}n^2(3n^2 - l(l+1)) - \frac{1}{6}n^2(4l^2+4l-3)$$

$$= n^2\left\{\frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{6}l(l+1) - \frac{2}{3}l(l+1) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= n^2\left\{\frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}l(l+1) + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{n^2}{2}\left\{5n^2 - 3l(l+1) + 1\right\}$$ ✓

2/3

Z4)

a) $u_l(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho)$

$$u_l'(\rho) = (l+1)\rho^l e^{-\rho} w(\rho) - \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho) + \rho^{l+1} e^{-\rho} w'(\rho)$$

$$u_l''(\rho) = (l+1) l \rho^{l-1} e^{-\rho} w(\rho) - (l+1)\rho^l e^{-\rho} w(\rho) + \underline{(l+1)\rho^l e^{-\rho} w'(\rho)}$$
$$- (l+1)\rho^l e^{-\rho} w(\rho) + \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho) - \underline{\rho^{l+1} e^{-\rho} w'(\rho)}$$
$$+ \underline{(l+1)\rho^l e^{-\rho} w'(\rho)} - \underline{\rho^{l+1} e^{-\rho} w'(\rho)} + \rho^{l+1} e^{-\rho} w''(\rho)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) u_l(\rho) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = w''(\rho)\rho^{l+1} e^{-\rho} + w'(\rho)\{(l+1)\rho^l e^{-\rho} - \rho^{l+1} e^{-\rho} + (l+1)\rho^l e^{-\rho} - \rho^{l+1} e^{-\rho}\}$$
$$+ w(\rho)\{(l+1) l \rho^{l-1} e^{-\rho} - (l+1)\rho^l e^{-\rho} - (l+1)\rho^l e^{-\rho} + \rho^{l+1} e^{-\rho}\}$$
$$- l(l+1)\rho^{l-1} e^{-\rho} w(\rho) + \rho_0 \rho^l e^{-\rho} w(\rho) - \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho)$$

Was mit $\rho = 0$? wg. teilen durch ρ...

Naja, da hätten wir schon bei der DGL probleme... Ich denke, wenn wir ein $u_l(\rho), \rho \neq 0$ finden können wir das einfach stetig fortsetzen.

$$\Leftrightarrow 0 = w''(\rho)\rho + w'(\rho)\{(l+1) - \rho + (l+1) - \rho\}$$
$$+ w(\rho)\{(l+1) l \tfrac{1}{\rho} - (l+1) - (l+1) + \rho - l(l+1)\tfrac{1}{\rho} + \rho_0 - \rho\}$$

$$\Leftrightarrow 0 = w''(\rho)\rho + w'(\rho)\{2(l+1-\rho)\} + w(\rho)\{-2(l+1) - \rho_0\}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \rho w''(\rho) + 2(l+1-\rho) w'(\rho) + (\rho_0 - 2(l+1)) w(\rho) \quad ✓$$

schön

b) $$w(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \Rightarrow w'(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \rho^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \rho^{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \rho^k$$

Gehen beide oder? In der einen Summe macht der Summand für $k=0$ keinen Beitrag? Warum verwenden wir dann den anderen? wg. ρ^k und nicht ρ^{k-1}??

$$w''(\rho) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k \rho^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} \rho^{k-1}$$

Kein Beitrag für $k=0$?!

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} \rho^{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} \rho^k + 2(l+1)\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \rho^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} k a_k \rho^k$$
$$+ (\rho_0 - 2(l+1)) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \{k(k+1) a_{k+1} + 2(l+1)(k+1) a_{k+1} - 2k a_k + (\rho_0 - 2(l+1)) a_k\} = 0$$

$$\Rightarrow a_{k+1}\{k(k+1) + 2(l+1)(k+1)\} = a_k\{2k - (\rho_0 - 2(l+1))\}$$

$$\Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{2(k+l+1) - \rho_0}{\ldots} a_k$$

✓ sehr gut!