Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

23.10.2016 **Theoretische Physik IV Übung 1** Marvin Zanke

H1) N w.w. freie Spins, Zustand $|\uparrow\rangle$ bzw. $|\downarrow\rangle$ mit gleicher W.keit.

1. $$W(N,m) = \binom{N}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{N-m},$$ denn

- in Wahrscheinlichkeitstheorie gilt im Allgemeinen für die W.keit eines Ereignisses:

$$W = \frac{G}{M}$$, wobei G: günstige Ausgänge des Exp.
M: mögliche Ausgänge des Exp.

Welche Argumentation war gefragt? die 2. war vorgesehen, die 1. jedoch ist elegant

$M = 2^N$, denn jedes Teilchen hat 2 mögliche Spinausrichtung und es gibt N Teilchen $\Rightarrow$ N verschiedene mögliche Ausgänge

$G = \binom{N}{m}$, denn man muss für m aus N Teilchen wählen, dass diese sich im Zustand $|\uparrow\rangle$ befinden, dafür gibt es genau $\binom{N}{m}$ Möglichkeiten

alternativ

- $\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{N-m}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine spezielle

$\uparrow p \quad \uparrow q$

Zusammensetzung mit m Teilchen im Zustand $|\uparrow\rangle$ auftritt (demnach $(N-m)$ in $|\downarrow\rangle$), d.h. exakte Zuordnung bzw. Durchnummerierung, welches Teilchen sich im entsprechenden Zustand befindet. Da es $\binom{N}{m}$ solcher möglichen Zusammensetzungen gibt, multipliziert man es mit dieser Zahl (ähnlich wie oben). ok!

Wieso $\langle m\rangle$ und nicht $\langle M\rangle$ wobei M die Zufallsvariable ist!

2. $$\sum_{m=0}^{N} W_\lambda(N,m) = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\lambda^m(1-\lambda)^{N-m} \overset{\text{Binomiallehrsatz}}{=} (\lambda+(1-\lambda))^N = 1^N = 1 \checkmark$$

$$\langle m\rangle = \sum_{m=0}^{N} m\cdot\binom{N}{m}\lambda^m(1-\lambda)^{N-m} \underset{\substack{m=0\\ \text{kein}\\ \text{Beitrag}}}{=} \sum_{m=1}^{N}\frac{N!}{(N-m)!\,(m-1)!}\lambda^m(1-\lambda)^{N-m}$$

$$= N\cdot\lambda\sum_{m=1}^{N}\frac{(N-1)!}{[(N-1)-(m-1)]!\,(m-1)!}\lambda^{m-1}(1-\lambda)^{(N-1)-(m-1)}$$

$$= N\lambda\sum^{N}\binom{N-1}{m-1}\lambda^{m-1}(1-\lambda)^{(N-1)-(m-1)} \overset{\text{Um.}}{=} N\lambda\sum^{N'}\binom{N'}{m'}\lambda^{m'}(1-\lambda)^{N'-m'} \overset{\text{Bin.lehrsatz}}{=} N\lambda$$

$$\langle m^2\rangle = \sum_{m=0}^{N} m^2 \binom{N}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{N-m} = \sum_{m=0}^{N} [m(m-1)+m] \binom{N}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{N-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{N} m(m-1) \binom{N}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{N-m} + \sum_{m=0}^{N} m \binom{N}{m} \lambda^m (1-\lambda)^{N-m}$$

$$= \sum_{m=2}^{N} \frac{N!}{(m-2)!\,(N-m)!} \lambda^m (1-\lambda)^{N-m} + \langle m\rangle$$ cool

$$= N(N-1)\lambda^2 \sum_{m=2}^{N} \frac{(N-2)!}{(m-2)!\,[(N-2)-(m-2)]!} \lambda^{m-2} (1-\lambda)^{(N-2)-(m-2)} + N\lambda$$

$$= N(N-1)\lambda^2 \sum_{m'=0}^{N'} \binom{N'}{m'} \lambda^{m'} (1-\lambda)^{N'-m'} + N\lambda = N(N-1)\lambda^2 + N\lambda$$

$$\leadsto \Delta m = \sqrt{(\Delta m)^2} = \sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = \sqrt{N(\lambda-\lambda^2)} = \sqrt{N\lambda(1-\lambda)}$$

3. Da die Spins w.w. frei sind und die Wahrscheinlichkeit, sie im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder $|\downarrow\rangle$ anzutreffen als gleich angenommen wird, folgt hier für $(\lambda = \frac{1}{2})$

$$\langle m\rangle = N\cdot\lambda = N\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{N}{2}$$

$$\Delta m = \sqrt{N\cdot\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{N}}{2}$$ ✓

$$\frac{\Delta m}{\langle m\rangle} = \frac{\sqrt{N}}{2}\cdot\frac{2}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

folgt direkt!

4. $M := 2m - N$ $\quad \langle M\rangle = \langle 2m - N\rangle = 2\langle m\rangle - N$

$$\langle M\rangle = \sum_{m=0}^{N} (2m-N)\, w_\lambda(N,m) = 2\sum_{m=0}^{N} m\, w_\lambda(N,m) - N\sum_{m=0}^{N} w_\lambda(N,m)$$

$$= 2\langle m\rangle - N\cdot 1 = 2N\lambda - N = N(2\lambda-1)$$ ✓

$$\langle M^2\rangle = \sum_{m=0}^{N} [4m^2 + N^2 - 4mN]\, w_\lambda(N,m) = 4\sum_{m=0}^{N} m^2 w_\lambda(N,m) + N^2 \sum_{m=0}^{N} w_\lambda(N,m) - 4N\sum_{m=0}^{N} m\, w_\lambda(N,m)$$

$$= 4\langle m^2\rangle + N^2\cdot 1 - 4N\cdot\langle m\rangle = 4\{N(N-1)\lambda^2 + N\lambda\} + N^2 - 4N^2\lambda$$ ✓

$$= 4N^2\lambda^2 - 4N\lambda^2 + 4N\lambda + N^2 - 4N^2\lambda$$

$$\leadsto \Delta M = \sqrt{\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2} = (4N^2\lambda^2 - 4N\lambda^2 + 4N\lambda + N^2 - 4N^2\lambda) - (N^2[4\lambda^2 - 4\lambda + 1])$$

$$= 4N\lambda - 4N\lambda^2 = 4N\lambda(1-\cancel{4}\lambda)$$ falsch.

$$\langle M\rangle = 2\langle m\rangle - N$$

$$\langle M^2\rangle = \langle (2m-N)^2\rangle = 4\langle m^2\rangle - 4\langle m\rangle N + N^2$$

$$\Rightarrow \Delta M^2 = \langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2 = \ldots = 4(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2) = 4\Delta m^2 = 4N\lambda(1-\lambda)$$