Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.

23-01-2017 Theoretische Physik IV 11. Übung Marvin Zanke

H14) Aus der Vorlesung: $\Phi = \mp \frac{1}{\beta} \sum_\alpha \log\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\alpha - \mu)}\right)$ $\begin{matrix} F \\ B \end{matrix}$

und wie gehabt: $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu}$

sowie $\beta = \frac{1}{k_B T}$ $\leadsto \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2}$

Außerdem gilt mit
$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} \pm 1} \quad \begin{matrix} F \\ B \end{matrix}$$
$$= \frac{e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} \quad \begin{matrix} F \\ B \end{matrix}$$

dass
$$1 \mp \langle n_p \rangle = 1 \mp \frac{e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} = \frac{\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}\right) \mp e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}$$
$$= \frac{1}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}$$

und
$$\log \langle n_p \rangle = \log\left(\frac{e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}\right) = -\beta(\epsilon_p - \mu) - \log\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}\right)$$
$$= -\frac{1}{k_B T}(\epsilon_p - \mu) - \log\left(\frac{1}{1 \mp \langle n_p \rangle}\right)$$
$$= -\frac{1}{k_B T}(\epsilon_p - \mu) + \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{T}(\epsilon_p - \mu) = -k_B \log \langle n_p \rangle + k_B \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right)$$

Beide Male V, μ konstant bei Kettenregel

$$\leadsto S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -\left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_{V,\mu} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)_{V,\mu} = \frac{1}{k_B T^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right)_{V,\mu}$$
$$= \frac{1}{k_B T^2} \left\{ \pm \frac{1}{\beta^2} \sum_p \log\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}\right) \mp \frac{1}{\beta} \sum_p \frac{\mp(\epsilon_p - \mu) e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}} \right\}$$
$$= \sum_p \left\{ \pm k_B \log\left(\frac{1}{1 \mp \langle n_p \rangle}\right) + \frac{1}{T}(\epsilon_p - \mu) \langle n_p \rangle \right\}$$
$$= \sum_p \left\{ \mp k_B \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) + \left(-k_B \log \langle n_p \rangle \langle n_p \rangle + k_B \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) \langle n_p \rangle\right) \right\}$$
$$= k_B \sum_p \left\{ -\langle n_p \rangle \log \langle n_p \rangle \mp \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) + \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) \langle n_p \rangle \right\}$$
$$= k_B \sum_p \left\{ -\langle n_p \rangle \log \langle n_p \rangle \mp \left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) \log\left(1 \mp \langle n_p \rangle\right) \right\} \quad \begin{matrix} F \\ B \end{matrix}$$

H15) $\langle E\rangle = \frac{1}{2}m\left(\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle\right)$

Annahme gerechtfertigt?

$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle$

$= \frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle$, $\langle E\rangle = \frac{3}{5}N\epsilon_F$

$\frac{\langle E\rangle}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_F$ pro Molekül

Geht das auch formaler? siehe $\langle v_x\rangle$ oder nächstes Blatt?

$\rightsquigarrow \frac{3}{5}\epsilon_F = \frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle \Leftrightarrow \frac{2}{5}\frac{\epsilon_F}{m} = \langle v_x^2\rangle$

Für $\langle v_x\rangle$ gehen wir etwas anders vor:

$$v_x = \sum_{\vec p} n(\epsilon_{\vec p})\underbrace{\frac{p_x}{m}}_{v_x} \cong \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 m}\int d^3p\,\frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT}+1}\,p_x$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 m}\int dp_x\int dp_y\int dp_z\,\underbrace{\frac{1}{e^{\left(\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}-\mu\right)/k_BT}+1}}_{\text{Symmetrisch in } p_x}\,\underbrace{p_x}_{\text{antisym.}}$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 m}\int dp_y\int dp_z\,0 = 0$$

H16) $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} \approx 1{,}259\cdot10^{-18}\,J \approx 7{,}86\,eV$

a) Elektronen im Metall: $\frac{N}{V}\sim10^{23}/cm^3$

Wie kann man $\hbar^2/m$ abschätzen?

$\epsilon_F \sim 2\frac{\hbar^2}{2m}\left(10^{30}/m^3\right) \sim 2\frac{\hbar^2}{2m}10^{20}/m^2 \sim \frac{\hbar^2}{m}10^{20}/m^2$

$\sim \frac{\hbar^2c^2}{mc^2}10^{20}/m^2 \sim \frac{(200\,MeV\,fm)^2}{511\,keV}10^{20}/m^2 \sim \frac{40000\cdot10^{-18}\,eV^2}{511\cdot10^3\,eV}10^{20}$

$\sim 80\cdot10^{-1}\,eV \sim 8\,eV$ ✓

b) $N/V \sim 10^{38}/cm^3 = 10^{44}/m^3$

$\epsilon_F \sim \cancel{7{,}856\cdot10^{10}}\,eV \sim \cancel{78{,}56\,GeV}$ Neutronen in einem schweren Kern

$6{,}82\cdot10^{-12}\,J = 42\,MeV$

c) $N/V \sim 2\cdot10^{22}/cm^3 = 2\cdot10^{28}/m^3$

$\epsilon_F \sim \cancel{2{,}687\,eV}$ ^3He in flüssigem ^3He

$7{,}78\cdot10^{-23}\,J = 0{,}486\,meV$ ✓

H15)

$$\langle V_{x_{ii}} \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\left(\sum_q \hat{N}_q \epsilon_q - \mu \sum_q \hat{N}_q\right)} V_{x_{ii}} \right]}{\sum_{\{n_q\}} e^{-\beta\left(\sum_q \hat{N}_q \epsilon_q - \mu \sum_q \hat{N}_q\right)}}$$

$$= \frac{\sum_{\{n_q\}} \langle n_1 \dots, n_m | e^{-\beta\left(\sum_q \hat{N}_q \epsilon_q - \mu \sum_q N_q\right)} V_{x_{ii}} | n_1, \dots, n_m \rangle}{\sum_{\{n_q\}} e^{-\beta\left(\sum_q \hat{N}_q \epsilon_q - \mu \sum_q \hat{N}_q\right)}}$$

q läuft noch über alle Werte? Nur $n_q \in \{0,1\}$ für Fermionen?

$$= \frac{\sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots\sum_{n_m} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 - \mu n_1)} \cdot \ldots \cdot V_{x_{ii}} e^{-\beta(n_i \epsilon_i - \mu n_i)} \cdot \ldots \cdot e^{-\beta(n_m \epsilon_m - \mu n_m)}}{\sum_{n_1}\sum_{n_2}\dots\sum_{n_m} e^{-\beta(n_1\epsilon_1 - \mu n_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\beta(n_i\epsilon_i - \mu n_i)} \cdot \ldots \cdot e^{-\beta(n_m\epsilon_m - \mu n_m)}}$$

$$= \frac{\sum_{n_i \in \{0,1\}} V_{x_{ii}} e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)}}{\sum_{n_i \in \{0,1\}} e^{-\beta n_i(\epsilon_i - \mu)}} = V_{x_{ii}}$$