# Hinweis

Die vorliegende Lösung wurde im Rahmen der jeweiligen Lehrveranstaltung an der Universität Bonn erstellt. Sofern im oberen Teil der ersten Seite oder auf der unten angegebenen Webseite nicht anders vermerkt, wurde diese Lösung von mir, Marvin Zanke, alleine angefertigt und eingereicht. Bei allem in einer anderen Farbe als dem üblichen Blau handelt es sich in der Regel um Korrekturen von mir oder des Tutors. Für mehr Informationen und meine gesamten Unterlagen, siehe:
https://www.physics-and-stuff.com/

**Ich erhebe keinen Anspruch auf Richtigkeit und Vollständigkeit der vorliegenden Lösungen! Dies gilt ebenso für obengenannte Korrekturen.**

31.01.2012 Theoretische Physik IV 12. Übung Marvin Zanke

H17) $M = N\sigma m_n$ Masse des Sterns: $M$

$= 2Nm_n$ $\sigma = A/Z \approx 2$

$m_n$: Nukleonenmasse

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$N = \sum_{|p|\le p_F} 2 = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\frac{1}{3}p_F^3$$

$$\Rightarrow p_F = \left(\frac{3N\pi^2\hbar^3}{V}\right)^{1/3}$$

Energie-Impulsbeziehung relativistisch: $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2}$

$$\epsilon_F = \sqrt{(m_e c^2)^2 + \left(\frac{3N\pi^2(\hbar c)^3}{V}\right)^{2/3}} = \begin{cases} \overset{NR}{\approx} \left(\frac{3N\pi^2\hbar^3}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{2m} \\ \overset{UR}{\approx} \hbar c\left(\frac{3N\pi^2}{V}\right)^{1/3}\end{cases}$$

2. $$\nu(\epsilon) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\, \delta(\epsilon - \epsilon_p)$$

$$E_0 = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\, \nu_I(\epsilon)\cdot\epsilon$$

hoch-relativistisch: $\epsilon_p = cp$

$$\rightsquigarrow \nu_I(\epsilon) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\,\delta(\epsilon-\epsilon_p) = \frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp\,\underbrace{\delta(\epsilon-\epsilon_p)}_{\epsilon - cp}p^2$$

$f(p) = \epsilon - cp$
$f(\epsilon/c) = 0$
$|f'(p)| = c$

$$= \frac{V}{\pi^2\hbar^3}\frac{1}{c}\int_0^\infty dp\, p^2\,\delta\left(p - \frac{\epsilon}{c}\right)$$

In nicht rel. auch Ruhemasse?

$$= \frac{V}{\pi^2\hbar^3 c}\frac{\epsilon^2}{c^2} = \frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3}\epsilon^2$$

nicht-rel.: $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} \to \nu_I(\epsilon) = \frac{3}{2}N\epsilon_F^{-3/2}\sqrt{\epsilon}$

$$\rightsquigarrow E_0^{ur} = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\,\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3}\epsilon^2 = \frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3}\frac{1}{4}\epsilon_F^4 = \frac{V}{4\pi^2(\hbar c)^3}\epsilon_F^4 = \hbar c\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{3N\pi^2}{V}\right)^{4/3} = \frac{V^{-1/3}\hbar c}{\pi^{2/3}\,4}(3N)^{4/3}$$

$$E_0^{nr} = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\,\frac{3}{2}N\epsilon_F^{-3/2}\epsilon^{3/2} = \frac{3}{2}N\epsilon_F^{-3/2}\int_0^{\epsilon_F}d\epsilon\,\epsilon^{3/2}$$

$$= \frac{3}{2}N\epsilon_F^{-3/2}\frac{2}{5}\epsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5}N\epsilon_F = \frac{3}{5}N\left(\frac{3N\pi^2\hbar^3}{V}\right)^{2/3}\frac{1}{2m}$$

$$= \frac{3N}{10m}\left(\frac{3N\pi^2\hbar^3}{V}\right)^{2/3}$$

3. $P_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \overset{NR}{=} -\frac{2}{3} \frac{3N}{10m} \frac{(3N\pi^2\hbar^3)^{2/3}}{V^{5/3}} = -\frac{1}{5} \frac{N}{m} (3N\pi)^{2/3} \frac{\hbar^2}{V^{5/3}}$

$\overset{UR}{=} -\frac{1}{3} V^{-4/3} \frac{\hbar c}{4\pi^{2/3}} (3N)^{4/3}$

4. $P_{grav} = \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{GM^2}{R^2}\right)$

Dimensionsgründe?

$P_0 + P_{grav} \overset{!}{=} 0 \overset{NR}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{GM^2}{R^2}\right) \overset{NR}{\underset{!}{=}} + \frac{1}{5} \frac{N}{m} (3N\pi)^{2/3} \frac{\hbar^2}{V^{5/3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R^4} \frac{GM^2}{4\pi} = \frac{1}{5} \frac{N}{m} (3N\pi)^{2/3} \frac{\hbar^2}{V^{5/3}}$

$\Leftrightarrow R^4 = \frac{GM^2}{4\pi} \frac{5mV^{5/3}}{N(3N\pi)^{2/3}\hbar^2} = \frac{GM^2}{4\pi} \frac{5m\,(4/3\pi)^{5/3}}{N(3N\pi)^{2/3}\hbar^2} R^5$

$\Leftrightarrow R = \frac{4\pi}{GM^2} \frac{N(3N\pi)^{2/3}\hbar^2}{5m\,(4/3\pi)^{5/3}} = \frac{4\pi}{GM^2} \frac{N^{5/3}\hbar^2 3^{7/3}}{4^{5/3}\pi \cdot 5 \cdot m}$

$= N^{5/3} \hbar^2 \frac{1}{GM^2} \frac{1 \cdot 3^{7/3}}{4^{2/3} \cdot 5 \cdot m} = \frac{M^{5/3}}{2^{5/3} m_n^{5/3}} \hbar^2 \frac{1}{GM^2} \frac{3^{7/3}}{4^{2/3} \cdot 5 \cdot m}$

$= \frac{1}{M^{1/3}} \frac{1}{8} \frac{1}{m_n^{5/3} \cdot m} \frac{\hbar^2}{G} 3^{7/3}$

$\overset{UR}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4\pi R^2} \left(\frac{GM^2}{R^2}\right) = \frac{1}{3} V^{-4/3} \frac{\hbar c}{4\pi^{2/3}} (3N)^{4/3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{R^4} \frac{GM^2}{4\pi} = \frac{1}{3} \frac{\hbar c}{4\pi^{2/3}} V^{-4/3} 3^{4/3} N^{4/3}$

$\Leftrightarrow \frac{GM^2}{4\pi} = \frac{1}{3} \frac{\hbar c}{4\pi^{2/3}} \frac{1}{(4/3\pi)^{4/3}} 3^{4/3} \left(\frac{M}{2m_n}\right)^{4/3}$

$\Leftrightarrow M^{2/3} = 3^{1/3} \pi^{1/3} \frac{\hbar c}{G} \frac{3^{4/3}}{(4\pi)^{4/3}} \frac{1}{(2m_n)^{4/3}}$